EQUAÇÕES DIFERENCIAIS APLICADAS AO MODELO DE MALTHUS NA DINÂMICA DE CRESCIMENTO DA POPULAÇÃO DE BATAGUASSU – MS

Amanda Dias Miguel Bezerra
Graduanda em Engenharia Ambiental e Sanitária
Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

Gracilla dos Santos Favoreto
Graduanda em Engenharia Ambiental e Sanitária
Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

Kelly Fernanda Queiroz
Graduanda em Engenharia Ambiental e Sanitária
Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

Marijane Cristina Oliveira da Silva
Graduanda em Engenharia Ambiental e Sanitária
Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

Weslen Xavier de Moraes
Mestre em Matemática pela UFMS/CPTL
Docente das Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

RESUMO
Os modelos matemáticos são utilizados constantemente na solução de problemas da atualidade, explicam de forma quantitativa e qualitativa os fenômenos da vida e são normalmente descritos por equações diferenciais que podem ser analisadas matematicamente, utilizando-se do modelo de Malthus podemos representar e analisar esses fenômenos através da dinâmica de crescimento populacional de determina região. Este trabalho terá como base a cidade de Bataguassu - MS, onde será realizado um comparativo dos resultados obtidos no IBGE com relação ao crescimento demográfico da cidade e estimativas apuradas pelo modelo Malthus Discreto e Contínuo, no período de 1980 à 2020.

PALAVRAS-CHAVE: Crescimento populacional; Equações diferenciais; Modelos de Malthus.

INTRODUÇÃO

As Equações Diferenciais (ED) são equações que envolvem a derivada de uma função apresentando a sua incógnita em forma de função e não apenas como uma variável. Neste tipo de abordagem, uma população é representada por variáveis de estado (densidade populacional) que podem ser pensadas como compartimentos, que aumentam e diminuem de nível conforme as regras definidas pelos sistemas de equações diferenciais que modelam as taxas de crescimento populacional.

Este artigo tem como objetivo aproximar as questões apresentadas em sala de aula a questões práticas do dia a dia, mostrando que a matemática está diretamente ligada a diversos assuntos, como por exemplo, ao crescimento populacional, onde os conceitos estudados pela disciplina nos oferece diversos recursos para a solução de problemas, o que nos possibilitará aplicá-los e então encontrarmos a solução. Utilizaremos o método de Malthus para o correlacionar o crescimento demográfico de Bataguassu as estimativas atingidas pós aplicação do modelo, fato que nos permitirá avaliar o crescimento de número de habitantes e a sua projeção.

O Modelo Malthus, que é uma equação diferencial ordinária e que pode ser solucionada através da aplicação do Método de Variáveis Separáveis.

1 METODOLOGIA

Este trabalho foi desenvolvido por meio de uma pesquisa exploratória em materiais bibliográficos constituídos de livros e arquivos nas formas impressas e eletrônicas. Uma pesquisa exploratória visa entender um problema e buscar referenciais para a compreensão do mesmo, e a busca de soluções já estudadas, para se chegar a uma conclusão bem fundamentada.

Deste modo, trata-se de um trabalho de revisão bibliográfica que tem por objetivo relacionar os conhecimentos adquiridos em sala de aula em torno da disciplina de equações diferenciais as suas aplicações reais como fonte de análise e compreensão dos modelos matemáticos base para o desenvolvimento dos trabalhos de bons engenheiros.

2 REFERENCIAL TEÓRICO

2.1 MODELOS MATEMÁTICOS

Segundo Bassanezi (2002), a modelagem matemática consiste na arte de transformar problemas da realidade em problemas matemáticos e resolvê-los, interpretando suas soluções na linguagem do mundo real.

A modelagem matemática surge da necessidade dos homens em compreender os fenômenos que nos cercam, de modo que possa interferir ou não em seu processo de construção, podemos dizer que são previsões de tendências e aproximações da realidade.

Um modelo deve prever, no mínimo, os fatos que os originaram e os motivos dos resultados obtidos, que facilita avaliar as previsões ou mesmo sugerir um aperfeiçoamento dos modelos.

Desta forma, modelo matemático é um conjunto de símbolos e relações matemáticas que representam de alguma forma o objeto estudado. O modelo pode ser considerado como uma síntese da reflexão sobre alguma parte da realidade. Seu objetivo é explicar ou entender a situação estudada para, eventualmente poder agir sobre ela e, mesmo as situações mais simples fornecem motivações para uma iniciação científica.

A Modelagem Matemática é uma arte que se propõe a elaborar, formular e resolver problemas. Com o objetivo de compreendermos este tipo de modelo, apresentaremos breves definições e conceitos que compõem a teoria das equações diferenciais e da teoria de Malthus.

2.2 EQUAÇÕES DIFERENCIAIS

As equações diferenciais (ED) começaram a ser estudadas por Isaac Newton e Gottfried W. Leibniz durante o século XVII. Newton classificou as equações diferenciais de primeira ordem de acordo com a seguinte forma:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \qquad \frac{dy}{dx} = f(y) \qquad \frac{dy}{dx} = f(x,y)$$

A partir destas equações desenvolveu um método para resolver a última equação, no caso em que $f(x,y)$ é um polinômio em x e y, usando séries infinitas. Newton desenvolveu cálculos e elucidou conceitos básicos da mecânica que forneceram a base para a aplicação das equações diferencias nesse período.

Leibniz chegou aos resultados fundamentais do cálculo independentemente, embora um pouco depois de Newton, mas foi o primeiro a publicá-lo. Devemos a ele a notação para derivada, $\frac{dy}{dx}$, e o sinal de integral, descobriu também o método de separação de variáveis, a redução das equações homogêneas a equações separáveis e o procedimento para resolver equações lineares de primeira ordem. Desde então essas equações têm sido utilizadas para modelar inúmeros fenômenos, dentre eles as taxas de crescimento populacional.

Podemos definir ED como uma equação que contém as derivadas ou diferenciais de uma ou mais variáveis dependentes, em relação a uma ou mais variáveis independentes. Essas são classificadas de acordo com o tipo, a ordem e a linearidade.

✓ Tipo: Se uma equação contém somente derivadas ordinárias de uma ou mais variáveis dependentes, com relação a uma única variável dependente, ela é chamada de Equação Diferencial Ordinária (EDO). As equações que envolvem as derivadas parciais de uma ou mais variáveis dependentes de duas ou mais variáveis independentes é chamada de Equação Diferencial Parcial (EDP).

Alguns exemplos:

EDO: $\frac{dy}{dt} - 5y = 1$

EDP: $\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{-\partial v}{\partial x}$

✓ Ordem: A ordem da derivada de maior ordem em uma equação diferencial é, por definição, a ordem da equação diferencial.

Exemplos:

Equação de segunda ordem: $\frac{d^2y}{dx^2} + 5 = 1$

Equação de quarta ordem: $a^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$

✓ Linearidade:

Uma equação diferencial é chamada de “linear” quando pode ser escrita na forma padrão tendo duas propriedades caracterizadas, onde na primeira, a variável dependente y e todas as suas derivadas são do primeiro grau, isto é, a potência de cada termo envolvendo y é 1, e a segunda, que cada coeficiente depende apenas da variável independente x. Uma equação que não é linear é chamada de “não linear” e pode ser escrita na forma implícita.

Equação diferencial Linear:

$$a_n(x)+\frac{d^ny}{dx^n}+a_{n-1}(x)+\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\cdots a_1(x)+\frac{dy}{dx}+a_0(x)y=g(x).$$

Equação diferencial não linear:

$$yy''-2y'=xe\frac{d^3y}{dx^3}+y^2=0$$

Considerando as equações diferenciais de primeira ordem a base para o desenvolvimento deste trabalho.

2.3 MODELO DE MALTHUS

Thomas Robert Malthus nasceu a 14 de Fevereiro de 1766 em Rookery, perto de Guildford, (Surrey), falecendo a 23 de Dezembro de 1834 em Bath. Foi um demógrafo e economista inglês, famoso, sobretudo pelas suas perspectivas pessimistas, mas muito influentes.

O modelo de Malthus foi criado em 1978 e gerou uma acirrada controvérsia no começo do século XIX. O crescimento da população, os meios de subsistência e as causas da pobreza em plena Revolução Industrial são os problemas centrais analisados pelo economista clássico Thomas Robert Malthus. Segundo Malthus: "Pode-se seguramente declarar que, se não for a população contida por freio algum, irá ela dobrando de 25 em 25 anos, ou crescerá em progressão geométrica (1,2,4,8,16,32,64,128,256, 512...). Pode-se afirmar, dadas as atuais condições médias da terra, que os meios de subsistência, nas mais favoráveis circunstâncias, só poderiam aumentar, no máximo, em progressão aritmética (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10) ‘‘. Segundo o economista clássico Malthus, “[...] o poder da população é tão superior ao poder do planeta de fornecer subsistência ao homem que, de uma maneira ou de outra, a morte prematura acaba visitando a raça humana”.

Vale ressaltar que o modelo matemático criado por Thomas Malthus, criado no ano de 1778, afirmava que a população mundial crescia apenas em proporção geométrica, enquanto os meios de sobrevivência cresciam apenas em proporção aritmética.

Com o intuito de demonstrar um comparativo das variáveis encontradas dividiremos o modelo em discreto e contínuo.

2.3.1 Modelo contínuo de Malthus

A fim de analisar o modelo Malthusiano consideremos as informações a seguir. Dada uma população *n*, animal ou vegetal, pode-se calcular sua variação em função do tempo temos o seguinte modelo que é dado por:

$$\frac{dP}{dt} = KP_0$$

$$\frac{dP}{dt} - KP_0 = 0$$

$$\mu = e^{-K.dt} = e^{-Kt}$$

$$e^{-Kt}.\frac{dP}{dt} - KP_0.e^{-Kt} = 0$$

$$\int [P_0.e^{-Kt}] = \int 0dt$$

$$P_0.e^{Kt} = c$$

$$P = \frac{c}{e^{-Kt}}$$

$$P(t) = c.e^{Kt}$$

$$P(0) = ce^0 = P_0$$

$$P_0 = c$$

$$\boxed{P(t) = P_0.e^{kt}}$$

Onde a taxa *k* é uma constante de proporcionalidade que relaciona a Natalidade (*n*) e a Mortalidade (*m*) e é dada por $K = n - m$.

Esta Equação Diferencial Linear Ordinária apresenta como solução a função dada pela expressão *P*(t) P_0e^{kt} onde P_0 é a população inicial no instantet_0, ou seja: *P* ($t_0 = P_0$. Portanto, conclui-se que:

1) Se *k* >0, a população cresce.

2) Se *k* <0, a população se reduzirá.

Este modelo é suficientemente simples e válido, se o crescimento de nossa população está sujeito apenas às taxas de natalidade e mortalidade, sem que sejam consideradas no modelo as taxas de migração, e ainda se pudermos considerar a diferença entre as taxas de natalidade e de mortalidade que é um valor constante *k* assim a seguinte formulação será dada por: $P(t) = P_0 e^{kt}$

2.3.2 Modelo discreto de Malthus

Seja *k*=*c*-*m*, onde *c* é o coeficiente de natalidade e *m* o coeficiente de mortalidade. Assim, *k* será a taxa de crescimento específico da população *P*(*t*). Esta taxa que será considerada constante, isto é,

$$\frac{P(t+1) - P(t)}{P(t)} = c - m = k$$

Observando, conclui-se que a taxa de crescimento da população é proporcional à própria população em cada período de tempo.

O modelo discreto de Malthus é dado por:

$$P(t+1) - P(t) = kP(t)$$

Considerando que a população inicial seja $P(0) = P_0$, então a solução do modelo discreto de Malthus será dada na forma:

$$k$$

$$1 +$$

$$P_t =$$

Assim, dada à população inicial, é possível fazer estimativas dessa população em qualquer tempo.

A equação acima pode ser reescrita na forma exponencial, isto é,

k

$1 +$

ln

$P(t) = P_0 e$

Sendo dada a população inicial, a solução do modelo contínuo será:

$$P(t) = P_0 e^{\beta t}$$

O modelo de Malthus é inútil para calcular populações em espaços de tempo muito longos, pois este modelo não leva em conta os problemas que podem ocorrer nestes períodos. Assim, o valor estimado sempre será muito acima da população real. Outro problema do modelo de Malthus é considerar que as taxas de natalidade e mortalidade serão sempre constantes. Mas quando se trata de população devem-se levar em conta os indivíduos que não podem se reproduzir; assim, o modelo falha mais uma vez. O ponto positivo desse modelo é que a partir dele é que começaram a surgir novos modelos para o cálculo de populações. Um exemplo é o modelo de Verhulst. Os modelos populacionais são muito usados para o cálculo (estimativa) de população em curto espaço de tempo, por exemplo, o crescimento de bactérias, para que se possam fazer projeções e tomar decisões a respeito da mesma (BASSANEZI, 2002).

Desde que Malthus apresentou sua teoria, são comuns os discursos que relacionam de forma simplista a ocorrência da fome no planeta ao crescimento populacional. A fome que castiga mais da metade da população mundial é resultado da má distribuição da renda e não da carência na produção de alimentos. Nos primeiros anos do século XXI, a produção agropecuária mundial era suficiente para alimentar cerca de 9 bilhões de pessoas, enquanto a população do planeta era pouco superior a 6 bilhões. A fome existe porque as pessoas não possuem o dinheiro necessário para suprir suas necessidades básicas, fenômeno este facilmente observável no Brasil, onde, apesar do enorme volume de alimentos exportados e de as prateleiras dos supermercados estarem sempre lotadas, a panela de muitos trabalhadores permanece vazia.

2.4 REGIÃO DE ANÁLISE – BATAGUASSU

Bataguassu é um município brasileiro do estado de Mato Grosso do Sul situado na microrregião de Nova Andradina. Encontra-se na divisa entre Mato Grosso do Sul e São Paulo, Bataguassu é um importante corredor rodoviário de acesso ao estado.

Possui área de 2.416,70 km². A área urbana do município é composta por 13 bairros na cidade, o Distrito da Nova Porto XV e o Bairro São Sebastião da Reta A-1.

Quanto aos aspectos demográficos, consideremos as informações do IBGE (Quadro 1).

Quadro 1: Aspectos populacionais

Ano	População total	População urbana	População rural
1980	9.204	6.230	2.974
1991	11.620	8.588	3.032
2000	16.197	10.757	5.440
2007	18.687	13.081	5.606
2010	19.825	15.234	4.591

Fonte: IBGE (2010).

O quadro denuncia que no período compreendido entre os anos de 1980 e 2010, ocorreu um crescimento de mais de 100% do total de habitantes no Município de Bataguassu. A densidade demográfica do Município é de 7,73 habitantes/km².

A taxa de mortalidade se refere ao número de óbitos por 1.000 habitantes, a taxa de mortalidade infantil ao número de óbitos infantis (menores de 1 ano) por 1.000 nascidos vivos e a taxa de mortalidade neonatal ao número de óbitos na idade de 0 a 27 dias por 1.000 nascidos vivos. Segue abaixo os índices de Bataguassu:

- Taxa de Mortalidade Geral 4,03
- Taxa de Mortalidade Infantil 8,97
- Taxa de Mortalidade Neonatal 8,97

Para a avaliação da dimensão longevidade, o IDH municipal considera o mesmo indicador do IDH de países: a esperança de vida ao nascer. Esse indicador mostra o número médio de anos que uma pessoa nascida naquela localidade no ano de referência (no caso, 2000) deve viver.

2.5 POPULAÇÃO DE BATAGUASSU/MS

Utilizaremos o modelo de Malthus (Discreto e Contínuo) para calcular o número de habitantes da população de Bataguassu. Os dados utilizados para esta comparação foram adquiridos pelo Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE).

Os cálculos foram feitos até o ano de 2020, com o objetivo de fazer uma previsão do número de habitantes do município. No quadro 2 são apresentados os valores da população de Bataguassu, segundo os dados oficiais do IBGE.

Lembrando que, na nossa pesquisa com base no modelo Malthusiano, levamos em consideração apenas as taxas de natalidade e mortalidade e não as taxas de migração para a elaboração das possíveis projeções.

Quadro 2: Estimativa da população entre 1980 à 2010

Ano	População total	População urbana	População rural
1980	9.204	6.230	2.974
1991	11.620	8.588	3.032
2000	16.197	10.757	5.440
2007	18.687	13.081	5.606
2010	19.825	15.234	4.591

Fonte: IBGE (2010).

2.5.1 Aplicação Modelos de Malthus Discreto

Para nossos cálculos utilizamos os valores da população total do município.

O primeiro passo é adquirir o fator de crescimento da população, tomando dois valores distintos de t.

Considerando a equação do modelo discreto de Malthus e fazendo P_t igual à população de 1991 e P_0 a população de 1980, podemos calcular o valor da taxa de crescimento k da população:

P(t) =$(1+k)^t . P_0$

$$P_t = 11620$$

$$P_0 = 9204$$

11620= $(1+k)^{11}$ 9204 $\leftrightarrow$ $(1+k)^{11}$= $\frac{11620}{9204}$ $\leftrightarrow$

1 +k = $\sqrt[11]{\frac{11620}{9204}}$ $\leftrightarrow$ 1+ k = 1,021416063

K = 1, 021416063 – 1 <u>k = 0,21416063</u>

Portanto, a taxa de crescimento da população de Bataguassu foi de aproximadamente 2,14 % ao ano entre os anos de 1980 e 1991. Com esta taxa é possível estimar o crescimento populacional de Bataguassu de 1980 a 2020, usando o modelo discreto de Malthus. A população de 1980 é considerada como inicial P_{1980} = 9204)

Logo:

P(t)= P(t)= $P_0 . e^{ln(1+k)^t}$

$P_{(1991)}$ = *9204* $e^{ln(1+0{,}02141)^{11}} \rightarrow P_{(1991)}$= *11619*

P (t)= $P_0 . e^{ln(1+k)^t}$

$P_{(2000)}$ = *9204* $e^{ln(1+0{,}02141)^{20}} \rightarrow P_{(2000)}$= *14060*

P (t)= $P_0 . e^{ln(1+k)^t}$

$P_{(2007)}$ = *9204* $e^{ln(1+0,02141)^{27}} \rightarrow P_{(2007)}$= *16307*

$$1 + k \quad t$$

P (t) = P_0 . ln

e

$P_{(2010)}$ = *9204* $e^{ln(1+0,02141)^{30}} \rightarrow P_{(2010)}$= *17377*

$$1 + k \quad t$$

P (t) = P_0 . ln

e

$P_{(2015)}$ = *9204* $e^{ln(1+0,02141)^{35}} \rightarrow P_{(2015)}$= *19319*

$$1 + k \quad t$$

P(t)= P_0 . ln

e

$P_{(2020)}$ = *9204* $e^{ln(1+0,02141)^{40}} \rightarrow P_{(2020)}$= *21477*

2.5.2 Aplicação Modelos de Malthus Contínuo

Nesse modelo utilizaremos os mesmos dados do modelo anterior, dado pela equação aplicada ao modelo continuo. Considerando também as populações de 1980 e 1991 para o cálculo da taxa de crescimento para o modelo contínuo de Malthus, obtemos o valor de k:

$$P(t) = P_0 \, . e^{kt}$$

$$P_t = 11620$$

$$P_0 = 9204$$

$$P(t) = 9204. \, e^{kt}$$

$$11620 = 9204. \, e^{11k}$$

$$e^{11k} = \frac{11620}{9204}$$

$$11k = \ln 1{,}26249$$

$$11k = 02330$$

$$K = \frac{0{,}2330}{11} = k = 0{,}2118$$

Portanto, de acordo com o método contínuo de Malthus a taxa de crescimento da população de Bataguassu foi de aproximadamente 2,12 % ao ano entre os anos de 1980 e 1991. Com esta taxa é possível estimar o crescimento populacional de Bataguassu de 1980 à 2020.

Logo:

$P(t) = P_0 \, .e^{kt}$

$P_{(1991)} = 9204 \; e^{(0{,}02118.11)\rightarrow} P_{(1991)} = 11621$

$P\ (t) = P_0 \, .e^{kt}$

$P_{(2000)} = 9204 \; e^{(0{,}02118.20)\rightarrow} P_{(2000)} = 14064$

$P\ (t) = P_0 \, .e^{kt}$

$P_{(2007)} = 9204 \; e^{(0{,}02118.27)\rightarrow} P_{(2007)} = 16314$

$P\ (t) = P_0 \, .e^{kt}$

$P_{(2010)} = 9204 \; e^{(0{,}02118.30)\rightarrow} P_{(2010)} = 17385$

$P\ (t) = P_0 \, .e^{kt}$

$P_{(2015)} = 9204 \; e^{(0{,}02118.35)\rightarrow} P_{(2015)} = 19330$

$P(t) = P_0 . e^{kt}$

$P_{(2020)}$ = 9204 $e^{(0{,}02118.40)} \rightarrow P_{(2020)}$ = 21491

Os valores obtidos pelos dois métodos de Malthus são sintetizados na tabela a seguir. Para facilitar a comparação, na primeira coluna estão os dados oficiais do IBGE.

Quadro 3: População de Bataguassu segundo Malthus, entre 1980 e 1991

Ano	Dados do IBGE	Malthus Discreto	Malthus Contínuo
1980	9.204	9.204	9204
1991	11.620	11.619	11621
2000	16.197	14.060	14064
2007	18.687	16.307	16.314
2010	19.825	17.377	17.385
2015		19.319	19.330
2020		21477	21.491

Fonte: IBGE (2010); Estimativas populacionais segundo os modelos adotados.

.

Observando acima verificamos que os valores obtidos pelos dois métodos de Malthus (Discreto e Contínuo) são praticamente idênticos. Porém, alguns valores são inferiores aos dados oficiais do IBGE. Isto se deve ao fato de se tratar de modelos exponenciais, sendo que a tendência da população de Bataguassu com estes modelos é crescer sem parar. Além disso, o intervalo entre uma observação e outra da população, 11 anos, é relativamente grande. Além disso, como a taxa de crescimento da população de Bataguassu é muito pequena, a população vai crescendo devagar.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

Este artigo foi realizado a partir de dados da cidade de Bataguassu/MS onde aplicamos os conceitos estudados à prática, utilizando-se de dados obtidos do IBGE. Foi realizada uma projeção do número de habitantes segundo o modelo de Malthus discreto e Contínuo comparando os valores estáticos do IBGE do período de 1980 à 2010 e sua projeção até o ano de 2020.

Nesta modelagem matemática o nosso objetivo é explicar a situação estudada encontrando soluções concretas através de fórmulas e teorias para resolvê-los. Estas equações tiveram seus estudos iniciados por Isaac Newton, Gottfried, W. Leibniz e desde então tem desempenhado importante papel no resolver de questões populacionais, possibilitando atuação em diversas áreas e ampliando o campo para novas e importantes descobertas.

Através da aplicação dos modelos podemos observação que os resultados são bastante parecidos, no entanto representam uma variação considerável com relação aos dados obtidos pelo IBGE, isso se deve ao fato do modelo de Malthus considerar o crescimento populacional constante e este crescimento é ilimitado, além de que não leva em conta as questões como taxas de longevidade e mortalidade de certa população.

Pode-se observar que o modelo se faz mais eficiente quando aplicado a um intervalo de tempo mais curto, sendo desta forma obtidos resultados mais próximos da realidade. Portanto, podemos concluir que o modelo de Malthus é eficiente para o cálculo de população que tenha um período reprodutivo curto, como as bactérias. No entanto, o desenvolver do trabalho se fez eficiente, uma vez que nos possibilitou analisar situações praticas em busca da assimilação dos conteúdos já apresentados em sala de aula.

REFERÊNCIAS

BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**: uma nova estratégia. São Paulo: Contexto, 2002.

BOYCE, Willian E. **Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno.** Rio de Janeiro: LTC, 2006.

ROCHA, BOTTA. Dinâmica populacional aplicada à população de Adamantina. Omnia Exatas, v.2, n.2, p.56-65, 2009. Disponível em: <http://www.google.com.br/url?sa=t&rct=j&q=&esrc=s&frm=1&source=web&cd=1&cad=rja&uact=8&ved=0CB0QFjAA&url=http%3A%2F%2Fwww.fai.com.br%2Fportal%2Fojs%2Findex.php%2Fomniaexatas%2Farticle%2Fdownload%2F21%2Fpdf&ei=Xst1VfTVHYSagwTG54KwCA&usg=AFQjCNGxdUyv2B5tACdb9ep4MSC_U5N3Yg&bvm=bv.95039771,d.eXY>. Acesso em: 15 mai. 2015.

ZILL, Dennis G. Equações Diferenciais. Vol. 1. São Paulo: Editora Pearson Makron Books, 2011.