REVISTA CONEXÃO ELETRÔNICA

INTRODUÇÃO À LÓGICA *FUZZY*

João Gabriel Royo da Silva
Graduando em Engenharia Elétrica
Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

André Aparecido Leal de Almeida
Esp. Em Segurança Cibernética – IGTI;
Docente das Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

Thiago Raniel
Mestre em Engenharia Elétrica (Automação) – UNESP;
Docente das Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

Richard Vieira do Espirito Santos
Esp. em Engenharia de Software – Universidade Estácio de Sá;
Docente das Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

Mariana Costa Falcão
Mestra em Engenharia Elétrica – UNESP
Docente das Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

Jair Antonio Longo Junior
Mestre em Engenharia Elétrica – UNESP;
Docente das Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

RESUMO
Com o avanço da tecnologia, a representação do conhecimento para o processamento ficou cada vez mais complexo. Representar esse conhecimento com a lógica tradicional booleana de bivalência, tomando como base de decisão apenas valores como: zero ou um, verdadeiro ou falso, gera um grau de complexidade e dificuldade. Como alternativa à lógica tradicional, Askar-Zadeh (1965) publicou o trabalho Fuzzy Sets no qual propõe outro método de representar o conhecimento. Nesse método o conhecimento é representado mais similarmente ao conhecimento humano, e representa “graus de verdade” utilizando expressões comumente usadas na linguagem natural humana como: “não tão”, “meio”, “quase” e etc. Essa lógica possui suporte e representações do conhecimento aproximadas ao invés de exatas, portanto pode ser aceita como uma melhor representação do conhecimento humano. Neste trabalho são apresentados os principais conceitos de conjuntos e lógica *fuzzy* tais quais seus principais operadores e componentes. É realizada a comparação entre a teoria clássica dos conjuntos e a teoria dos conjuntos *fuzzy*. Além disso, é descrito como funciona o processo de *fuzzificação* e seus componentes. Este trabalho apresenta também, os principais pontos a se considerar no momento da seleção da função de pertinência que será utilizada para descrever os números *fuzzy*. No final, é apresentado como obter um valor número de saída através de um dos métodos de *desfuzzificação*.

PALAVRAS-CHAVE: Lógica *Fuzzy*, Controle *Fuzzy*, *Fuzzy*.

1 INTRODUÇÃO

Nos tempos modernos, cada vez mais controlado por computadores, a representação do conhecimento para o processamento ficou cada vez mais complexo. Representar esse conhecimento com a lógica tradicional booleana de bivalência, tomando como base de decisão apenas valores como: zero ou um, verdadeiro ou falso, gera um grau de complexidade e dificuldade.

Como alternativa à lógica tradicional, Askar-Zadeh (1965) publicou o trabalho *Fuzzy Sets* no qual propõe outro método de representar o conhecimento. Nesse método o conhecimento é representado mais similarmente ao conhecimento humano, representa "graus de verdade" utilizando expressões comumente usadas na linguagem natural humana como: "não tão", "meio", "quase" e etc. Essa lógica possui suporte, representações do conhecimento aproximadas ao invés de exatas, portanto, pode ser aceita como uma melhor representação do conhecimento humano.

O termo *fuzzy* possui vários significados, porém os mais utilizados permeiam entre vago, nebuloso, difuso, incerto e entre outros. Em 1970, Bellman e Zadeh propuseram outro estudo no qual descrevem a tomada de decisão em ambientes *fuzzy*.

A utilização de sistemas *Fuzzy* é adequada para raciocínios onde a obtenção de modelos matemáticos é muito complexa e onde o conhecimento precisa ser representado com incertezas ou aproximado, o que permite a esses sistemas a tomada de decisão baseados em dados contendo incertezas (SUMATHI; PANEERSELVAM, 2010).

Essa forma de representar o conhecimento é capaz de tomar decisões racionais mesmo em um ambiente de incertezas e imprecisões (LEE, 1990). Com isso, a teoria dos conjuntos *fuzzy* e da lógica *fuzzy* podem ter sua aplicação em diversas áreas auxiliando na tomada de decisão.

2 OBJETIVOS

Este trabalho tem como objetivo apresentar os conceitos sobre a lógica *fuzzy* bem como a teoria dos seus conjuntos, regras, números e processo de *desfuzzificação*.

No final desse trabalho espera-se que o leitor tenha uma base teórica sobre todos os conceitos apresentados e podendo aplicá-los para as mais diversas áreas nas quais a lógica *fuzzy* possa ser utilizada.

3 MATERIAL E MÉTODOS

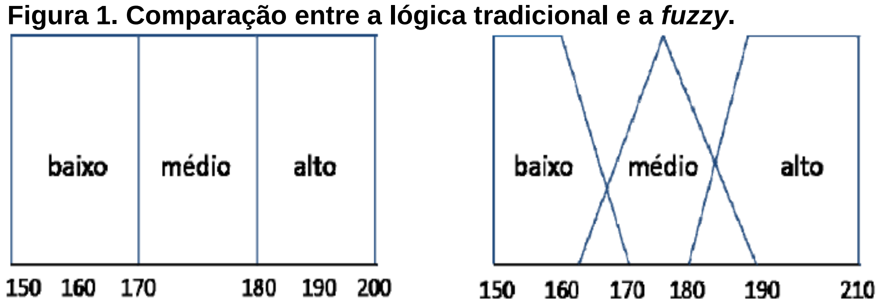
Por se tratar de uma revisão bibliográfica, utilizou-se neste trabalho pesquisas bibliográficas e documentais, tomando como base, artigos, livros e publicações sobre lógica *fuzzy*. Foram filtrados os conteúdos que apresentavam os conceitos em torno desse método focando-se principalmente na base teórica e definição.

4 TEORIA *FUZZY*

Para Simões e Shaw (2007), a lógica *fuzzy* mapeia um espaço de entrada em um espaço da saída, pode ser utilizada juntamente com outros métodos convencionais de controle e é baseada na linguagem natural. Os valores são mapeados utilizando uma função de pertinência, a qual define qual o nível de pertinência do valor à um determinado grupo. Podemos então definir o estudo de Zadeh como uma classe de objetos com contínuos graus de pertinência, a qual determina o quão pertencente um objeto é de um grupo, definindo essa pertinência mapeada em um valor na escala de 0 (pertinência zero) à 1 (pertinência máxima).

Essa representação nos permite representar uma fronteira menos nítida entre os objetos como por exemplo, se considerarmos uma pessoa “alta” possuindo 1,9 metros de altura, podemos definir uma pessoa possuindo 1,85 metros como sendo uma pessoa “quase alta” e uma com 2,0 metros como sendo “muito alta”. Isso nos permite uma representação qualitativa e não somete quantitativa. Uma comparação entre a lógica tradicional e a lógica *fuzzy* é apresentada na Figura 1.

Figura 1. Comparação entre a lógica tradicional e a *fuzzy*.



Fonte: Extraído de MARRO et al. (2010).

Por conta dessa característica, Tsaur et al. (2002) indicam conjuntos *fuzzy* para capturar o conhecimento de tomadores de decisões por utilizar termos do dia a dia, de fácil interpretação e domínio. Também segundo os autores, em que a ambiguidade dos conceitos está associada ao julgamento subjetivo dos seres humanos.

Na teoria clássica dos conjuntos e existem apenas duas possibilidades: o elemento pertence ao conjunto ou não (ARTERO, 2009). Para esses conjuntos existem apenas duas funções de pertinências:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \\ 0 & \text{se } x \notin A \end{cases} \quad (1)$$

Na teoria dos conjuntos *fuzzy*, os elementos podem ser associados à um grau de pertinência, o qual descreve o quanto o elemento pertence ou não à um conjunto. Esse grau de pertinência é representado por um grau obtido através da função de pertinência μA contido no intervalo [0,1] (ARTERO, 2009). Por exemplo, para um universo de discurso *U* e *A* um subconjunto nebuloso pertencente à *U, A* é definido por μA que associa para todo x um grau de pertinência no intervalo [0,1] e, para isso *A* deve ser descrito como um conjunto de pares ordenados conforme a expressão:

$$A = \{(x, \mu_A(x)) \, ; x \in U e \, \mu_A(x) \in [0,1]\} \quad (2)$$

Onde, μA (x) é uma função de pertinência que aponta o grau de *x* em *A*. μA (x) pode assumir os seguintes valores:

$$\mu_A(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \text{ pertencer totalmente ao subconjunto } \boldsymbol{A}. \\ 0 < \mu_A < 1 & \text{se } x \text{ pertencer parcialmente ao subconjunto } \boldsymbol{A}. \\ 0 & \text{se } x \text{ não pertencer ao subconjunto } \boldsymbol{A}. \end{cases} \quad (3)$$

Portanto, na lógica *fuzzy*, um elemento pertence a um conjunto com um certo grau de pertinência, fazendo com que uma determinada sentença possa ser parcialmente verdadeira e parcialmente falsa. Além disso, um mesmo elemento pode ter graus de pertinências diferentes de 0 para mais de um conjunto *fuzzy* (MARRO et al., 201?).

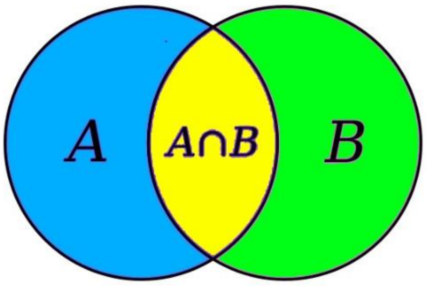
A lógica *fuzzy* pode ser considerada como um conjunto de princípios matemáticos para a representação do conhecimento baseado no grau de pertinência dos termos (graus de verdade). Como pode ser observado na expressão 3, o intervalo de pertinência é [0,1], onde 0 significa que um elemento não pertence a um conjunto, enquanto 1 significa completa pertinência ao conjunto, e valores entre 0 e 1 representam graus parciais de pertinências (SILVA, 2008).

4.1 Conjuntos Fuzzy vs Conjuntos Tradicionais

4.1.1 Intersecção dos conjuntos

Sendo E um universo de discurso e dados dois conjuntos A e B, onde $A \subset E$ e $B \subset E$, define-se $A \cap B$ como o conjunto de todos os elementos x que pertencem a A e B. Por tanto, dados os vetores de pertinência dos elementos x de A e B, pode-se determinar a pertinência de $x \in A$ conforme a equação 1. Uma representação gráfica dos conjuntos A, B e $A \cap B$ podem ser vistos na Figura 2.

Figura 2. Representação gráfica de conjuntos e sua intersecção.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Sendo assim, μA∩B (x):

$$\mu_{A\cap B}(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \cap B \\ 0 & \text{se } x \notin A \cap B \end{cases} \qquad (4)$$

A equação 4 pode ser representada também com a seguinte expressão:

$$\mu_{A\cap B}(x) = \mu_A(x) \cdot \mu_B(x) \qquad (5)$$

Onde o operador "·" simboliza a função *booleana E* executada em cada par de elementos de *A* e *B* conforme a Tabela 1 que segue:

Tabela 1. Execução da função E em cada par.

A	B	A ∩ B	Pertinência
0	0	0	não-membro
0	1	0	não-membro
1	0	0	não-membro
1	1	1	membro

Fonte: Elaborado pelos autores.

Portanto, a intersecção é o maior subconjunto de E em que x pertence aos conjuntos A e B ao mesmo tempo, portando *μA (x): U → {0, 1}.*

A intersecção de dois conjuntos *fuzzy* é usada para definir a região comum entre dois conjuntos *A* e *B*, resultando em um terceiro conjunto cuja sua representação é dada por e sua representação é dada pelo operador min:

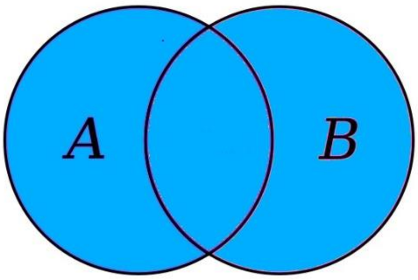
$$\mu_{A\cap B}\left(x\right) = min\left[\mu_A\left(x\right), \mu_B\left(x\right)\right] \qquad (6)$$

Na prática, temos o mesmo resultado da teoria dos conjuntos *booleanos*, porém neste caso μA (x): U → [0, 1] e esse conjunto é sempre menor do que qualquer um dos conjuntos.

4.1.2 União dos conjuntos

Dados dois conjuntos *A* e *B* a união A∪B é o conjunto com todos os elementos x que pertencem a *A* e *B* ao mesmo tempo conforme Figura 3.

Figura 3. Representação gráfica de conjuntos e sua união.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Sendo assim, μA∪B (x):

$$\mu_{A\cap B}\left(x\right) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in A \cup B \\ 0 & \text{se } x \notin A \cup B \end{cases} \qquad (7)$$

A equação 7 pode ser representada também com a seguinte expressão:

$$\mu_{A\cap B}\left(x\right) = \mu_A\left(x\right) + \mu_B\left(x\right) \qquad (8)$$

Onde o operador “+” simboliza a função booleana OU executada em cada par de elementos de A e B, conforme a Tabela 2.

Tabela 2. Execução da função E em cada par.

A	B	A∪B	Pertinência
0	0	1	não-membro
0	1	1	membro
1	0	1	membro
1	1	0	membro

Fonte: Elaborado pelos autores.

A união de dois conjuntos *fuzzy* é usada para definir a região que x possui μ não nulo e $x \in A$ e $x \in B$, resultando em um terceiro conjunto cuja sua representação é dada por e sua representação é dada pelo operador *max*:

$$\mu_{A \cup B}(x) = max\left[\mu_A(x), \mu_B(x)\right] \quad (9)$$

Sendo assim, A∪B é menor subconjunto do universo de discurso E, que inclui ambos os conjuntos A e B. Esse conjunto é sempre maior do que qualquer um dos conjuntos.

4.2 *Fuzzificação*

As atividades dos seres humanos requerem uma aproximação dos dados e informações sensoriais, utilizando termos vagos e imprecisos. Podemos chamar de *fuzzificação* o processo de transformação do conhecimento em notação *fuzzy* e esse é o primeiro processo para controladores *fuzzy*.

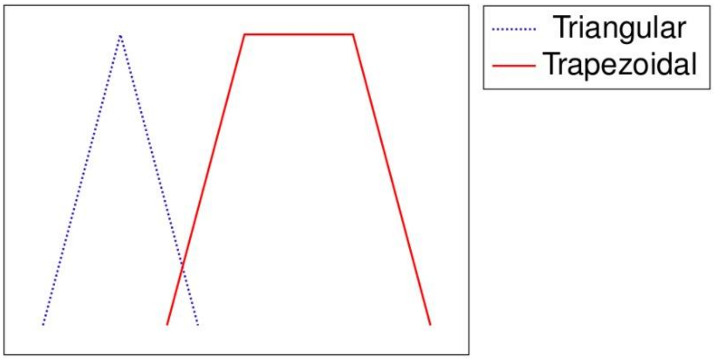
Para a apresentação completa de um conjunto *fuzzy*, os termos relacionados com a etapa de *fuzzificação* são apresentados e definidos a seguir, (i) conjunto de elementos (são elementos que possuem uma determinada característica em comum e que é diferente dos demais, assim como cada indivíduo está para o seu grupo de amigos); (ii) variáveis linguísticas (são os atributos que classificam os elementos. Normalmente dão nomes aos conjuntos, podemos citar como exemplo “altura”, “peso” e “idade”); (iii) termos linguísticos (são adjetivos ou advérbios que descrevem as variáveis linguísticas e são uma avaliação subjetiva dessas); (iv) conjunto de referência (é o intervalo numérico a ser considerado para a variável linguística. Para as características que determinam os elementos, define-se o intervalo, a ser considerado no caso específico dos possíveis valores, assim como [0, 100] anos para a idade. Esse intervalo será preenchido por diversos números *fuzzy* que terão cada um, um subintervalo) e (v) função de pertinência (determina o grau de pertinência [0,1] de um elemento qualquer com referência à variável linguística, descrito por um termo linguístico).

4.2.1 Funções de pertinência

Segundo Simões e Shaw (2007), uma função de transferência é uma função numérica gráfica ou tabulada que atribui valores de pertinência *fuzzy* para valores discretos de uma variável, em seu universo de discurso. É importante lembrar que o universo de discurso de uma variável é o intervalo numérico de valores reais que ela pode assumir.

Existem algumas funções de pertinência que são comumente usadas, tais qual a triangular, trapezoidal, *fuzzy-tom*, gaussiana e sino generalizada. A Figura 4 mostra as funções de pertinência triangular e trapezoidal.

Figura 4. Funções de pertinência triangular e trapezoidal.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Embora as funções de pertinência mais comuns sejam as triangulares e as trapezoidais por serem mais fáceis de serem geradas, isso não é uma obrigatoriedade. As funções de pertinência podem ser escolhidas conforme a natureza do processo a ser controlado, experiência ou em uma entrevista com um conhecedor da área na qual se deseja fazer o controle utilizando a lógica *fuzzy*.

A escolha da função de pertinência não é trivial e segundo Simões e Shaw (2007) algumas sugestões podem ser mencionadas, (i) um número prático de conjuntos *fuzzy* é algo entre 2 e 7. Quanto maior for o número de conjuntos, maior será a precisão do sistema, porém há um aumento no gasto computacional; (ii) os formatos mais encontrados são os triangulares e os trapezoidais por serem mais facilmente gerados. Em casos em que o desempenho suave é crítico, funções do tipo $\cos^2(x)$, gaussiana, splice cúbico (S-shape) e sigmóide, podem ser usadas. As funções não precisam ser simétricas ou igualmente espaçadas e cada variável pode ter sua própria função de pertinência diferente das demais; (iii) outro fator importante é a superposição entre as funções de pertinência *fuzzy*. O mínimo de 25% e um máximo de 75% foram determinados experimentalmente como adequados, sendo 50% o razoável; (iv) por ser uma tarefa trabalhosa, técnicas especiais usando redes neurais e/ou algoritmos genéricos estão disponíveis para a geração automática e (v) as funções de pertinência devem ser completas, ou seja, todo o conjunto de funções de pertinência associado a uma variável deve cobrir todo o universo de discurso desta variável.

4.2.2 Variáveis linguísticas

Segundo Simões e Shaw (2007), uma variável linguística u no universo de discurso U é o conjunto de termos, nomes ou rótulos que um, T (x), com cada valor sendo um número fuzzy definido em U. Por exemplo se u for altura de uma pessoa, então seu conjunto de termos T (x) poderia ser:

$$T\ (\text{altura}) = \{\text{baixo, médio, alto}\} \qquad (10)$$

Pode-se utilizar modificadores associados com as variáveis linguísticas. Modificadores são termos ou operações que modificam a forma dos conjuntos *fuzzy* (ou seja, a intensidade dos valores *fuzzy*), podendo-se citar, por exemplo, os advérbios muito, pouco, extremamente, quase, mais ou menos, entre outros. Estes podem ser classificados em aumentadores, quando aumentam a área de pertinência de um conjunto *fuzzy*, ou, analogamente, diminuidores, quando diminuem a área de pertinência de um conjunto *fuzzy*.

4.2.3 Números *fuzzy*

Um número *fuzzy* representa a área do gráfico formada pela função de pertinência. Tais números interpretam a qualificação atribuída a determinada variável linguística através da avaliação subjetiva, assim, para cada termo linguístico utilizado para avaliar a variável há um número *fuzzy* (SILVA, 2008). Sendo assim, os números *fuzzy* podem ser triangulares, trapezoidais e de qualquer outra função de pertinência utilizada.

Para que um conjunto possa ser definido como um número *fuzzy*, alguns critérios são exigidos (SOUZA, 2014), tais como, (i) o número deve ser normal, ou seja, $max\ \mu\ X\ (u) = 1,\ u \in U$; (ii) deve ser convexo (possuir como função de pertinência $\mu\ X\ (u)$ valores estritamente crescentes ou decrescentes para valores crescentes de x) e (iii) o conjunto suporte deve ser limitado, ou seja, *supp* (u) deve ter μ X (u)>0.

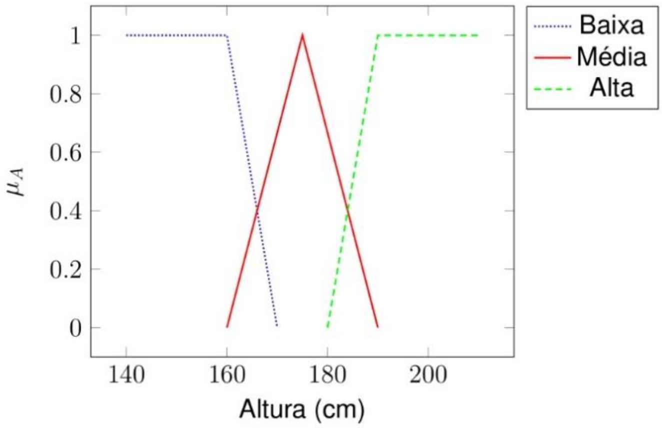
Um número *fuzzy* X com uma função de pertinência triangular, tem sua função descrita como segue:

$$\mu_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < x_1 \\ \frac{x - x_1}{x_M - x_1} & \text{se } x_1 \leq x \leq x_M \\ \frac{x - x_2}{x_M - x_2} & \text{se } x_M \leq x \leq x_2 \\ 0 & \text{se } x > x_2 \end{cases} \quad (11)$$

O intervalo [x1, x2] limita o número triangular *fuzzy*, o ponto (xM, 1) é o pico desse número e o segmento de reta formado pelos pontos (xM, 0) e (xM, 1) é a sua altura. Uma representação matemática simples do número triangular *fuzzy* mostrado nessa figura pode ser dada através da chamada representação por ponto: X = (x1, xM, x2).

Um exemplo de representação de número *fuzzy* triangular pode ser visto no gráfico da Figura 5 abaixo. O número *fuzzy* que representa o conjunto de altura média da seguinte forma: X = (160, 175, 180).

Figura 5. Representação gráfica para altura usando conjuntos *fuzzy*.



Fonte: Elaborado pelos autores.

4.2.4 Operações básicas com números *fuzzy*

As operações matemáticas básicas com números *fuzzy* são muito parecidas com o que estamos acostumados. Sejam A = (a, b, c) e B = (d, e, f) números *fuzzy*, podemos realizar as seguintes operações básicas:

• Adição: A ⊕ B = (a, b, c) ⊕ (d, e, f) = (a + d, b + e, c + f);

• Subtração: A - B = (a, b, c) (d, e, f) = (a − d, b − e, c − f);

• Multiplicação: A ⊗ B = (a, b, c) ⊗ (d, e, f) = (a.d, b.e, c.f);

• Simetria: −A = − (a, b, c) = (−a, −b, −c);

• Inversão: 1/A = (1/a, 1/b, 1/c);

Outras operações podem ser vistas em Vahidi e Razvani (2013). Essas operações podem ser estendidas para números *fuzzy* trapezoidais.

4.3 Sistemas Fuzzy Baseados em Regras

Dos diferentes tipos de sistemas *fuzzy*, podemos destacar baseado em regras proposto por Mandani (1997). Nesse tipo de *fuzzy*, utiliza-se um conjunto de regras para se determinar qual será a saída do sistema. As regras *fuzzy* se baseiam em consequentes ou antecedentes, as quais resultam em conclusões ou consequentes. Uma regra *fuzzy* pode ser representada como segue:

SE <condição>ENTÃO <conclusão> (12)

Ou:

SE <antecedente>ENTÃO <consequente> (13)

Essas condições relacionam valores *fuzzy* linguísticos de uma ou mais variáveis, como o exemplo:

SE velocidade = <muito alta>ENTÃO pressão do freio <muito alta> (14)

Segundo Simões e Shaw (2007), temos dois tipos básicos de regras ou associações *fuzzy*: o modus *ponens* (modo afirmativo) e o modus *tollens* (modo negativo). Em ambos os casos eles operam de modo a se basear em condições ou premissas, com as quais, geram uma consequência determinada.

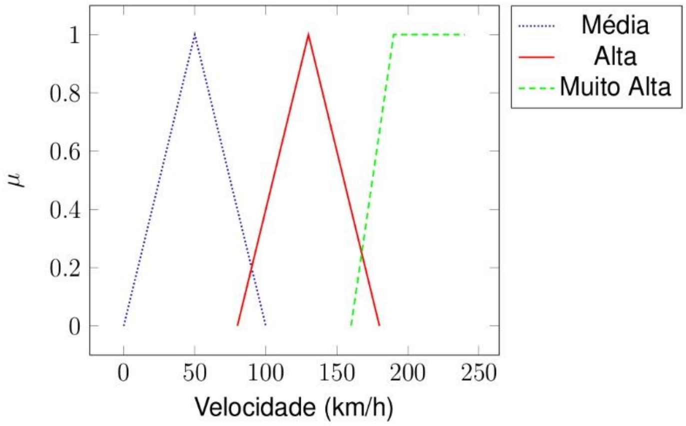
modus *ponens*:	Premissa 1:	u = A
	Premissa 2:	se u = A então y = B
	Premissa 3:	y = B
modus *tollens*:	Premissa 1:	y = não–B
	Premissa 2:	se u = A então y = B
	Premissa 3:	u = não–A

Spatti (2007), em seu trabalho, mostra um exemplo de aplicação usando um sistema *fuzzy*. Duas regras são definidas como segue:

1. SE "Velocidade" é Alta ENTÃO "Pressão no freio" é Grande.
2. SE "Velocidade" é Muito Alta ENTÃO "Pressão no freio" é Muito Grande.

Usando o exemplo acima, podemos obter o gráfico da entrada *fuzzy* referente à variável linguística velocidade (V), conforme a Figura 6, e seu conjunto de termos linguísticos triangulares Tv = {Média, Alta, Muito Alta}.

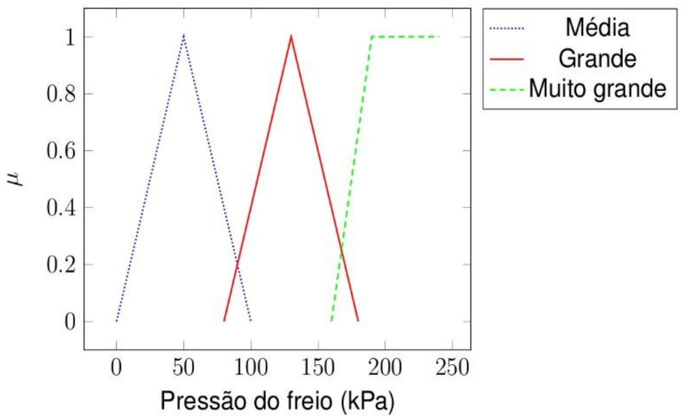
Figura 6. Entrada do sistema *fuzzy* de exemplo.



Fonte: Adaptado de Spatti, 2007.

A variável de saída pressão do freio (P) tem seu conjunto e termos linguísticos triangulares Tp = {Média, Grande, Muito Grande} e seu gráfico, conforme a Figura 7.

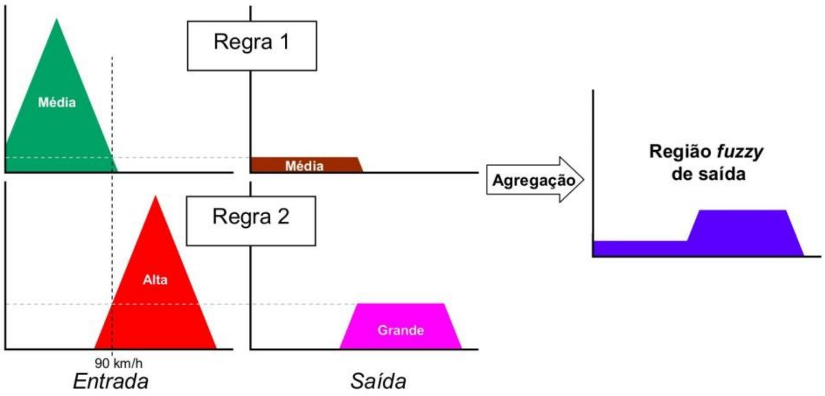
Figura 7. Saída do sistema *fuzzy* de exemplo.



Fonte: Adaptado de Spatti (2007).

Supondo que um carro esteja à 90 Km/h em uma via, as regras 1 e 2 seriam ativadas com seus respectivos graus de pertinência, gerando uma região de saída como podemos observar na Figura 8.

Figura 8. Representação do sistema.



Fonte: Extraído de Spatti (2007).

Essa região de saída pode ser convertida para um valor numérico usando um processo de *desfuzzificação* como descrito à seguir:

4.3 *Desfuzzificação*

Desfuzzificação é o processo contrário à *fuzzificação*. Esse processo transforma um número *fuzzy* em um número real. Existem vários métodos na literatura dentre alguns deles temos: média dos máximos, centro da área e o método do corte alfa. O mais comum e simples é o centro de área (CoA) ou centróide, também pode ser encontrado em algumas literaturas como centro de gravidade (CoG), proposto por Takagi e Sugeno (1985).

Esse método consiste em se calcular a o centro geométrico da área do número *fuzzy*. Sua equação é apresentada abaixo na equação 15:

$$CoA = \frac{\int \mu_x(x) * x \ dx}{\int \mu_x(x) \ dx} \tag{15}$$

5 CONSIDERAÇÕES FINAIS

Com esse trabalho, pode-se reconhecer a lógica fuzzy como uma técnica muito eficiente para a representação do conhecimento para uso em controladores. A lógica fuzzy consegue representar valores imprecisos, facilitando o projeto de tais controladores.

O processo utilizando lógica fuzzy é simples, bastando representar os conjuntos de elementos dentro das variáveis linguísticas. Além de permitir capturar o conhecimento de um profissional e representando-o através de um conjunto de regras.

Após o processamento pelo sistema, obtém-se um valor numérico através da desfuzzificação, que pode ser usado como entrada de outro sistema ou controlador. Existem diferentes métodos de desfuzzificação como os Centro-do-Máximo (C-o-M) e o Média-do-Máximo (M-o-M) que não foram apresentados nesse trabalho.

Apesar de ser uma técnica antiga e inicialmente proposta em 1965 por Zadeh, pode ser aplicada nas mais diversas áreas de tomada de decisão nos tempos modernos.

REFERÊNCIAS

ARTERO, A. O. Inteligência Artificial: Teoria e prática. 1. ed. São Paulo: Livraria da Física, 230 p. 2009.

ASKAR-ZADEH, L. Fuzzy Sets. 8. ed. Califórnia: Pearlson Prentice Hall, p. 338-353, 1965.

LEE, C. C. Fuzzy logic in control systems: fuzzy logic controllers - Part I and II. 8. ed. Califórnia: IEEE Transctions on Systems, Man and Cybernectics, v. 20. p. 440-435, 1990.

MANDANI, E. H. Application of Fuzzy Logic to Approximate Reasoning Using Linguistic Synthesis. Londres, 1997.

MARRO, A. A. et al. Lógica Fuzzy: Conceitos e aplicações. Natal, 2010.

SILVA, C. F. D. Avaliação da qualidade de serviços: uma abordagem pela teoria dos sistemas fuzzy. Monografia (Mestre em engenharia elétrica) — Universidade Federal de Pernambuco, Recife, 2008.

SIMÕES, M. G.; SHAW, I. S. Controle e Modelagem fuzzy. 2. ed. São Paulo: Edgard Blücher Ltda, p. 10-30, 2007.

SOUZA, C. V. P. d. Um modelo fuzzy para apoio a decisão em investimentos no mercado financeiro. Monografia (Mestre em engenharia de produção) — Universidade Federal de Pernambuco, Caruaru, 2014.

SPATTI, D. H. Sistema Inteligente Para Controle de Relés Reguladores de Tensão. Monografia (Mestre em engenharia elétrica) — Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2007.

SUMATHI, S.; PANEERSELVAM, S. Computational inteligence and paradigms: theory & applications using MATLAB. 1. ed. Boca Raton: CRC Press, 821 p. 2010.

TAKAGI, T.; SUGENO, M. Fuzzy identication of systems and its application to modelling and control. IEEE Trans. on Syst. M and Cybernetics, v. 15, p. 116-132, 1985.

TSAUR, S.-H. et al. The evaluation of airline service quality by fuzzy MCDM. 2. ed. Taipei: Tourism Management, v. 23, p. 107-115, 2002.

USIDA, W. F. Controle fuzzy para melhoria do perfil de tensão em sistemas de distribuição de energia elétrica. Monografia (Mestre em engenharia elétrica) — Escola de Engenharia de São Carlos, São Carlos, 2007.

VAHIDI, J.; RAZVANI, S. Arithmetic Operations on Trapezoidal Fuzzy Numbers. Behshahr, 2013.

WANG, C. A study of membership functions on mandani-type fuzzy inference system for industrial decision-making. Monografia (Mestre em engenharia e mecânica) — Lehigh University, Pennsylvania, 2015.

ZHAO, R.; GOVIND, R. Algebric characteristics of extended fuzzy number. Information Science, v. 54, n. 1-2, p. 103–130, 1991.