

# ANÁLISE DE UM CIRCUITO RLC EM SÉRIE ATRAVÉS DE EXPERIMENTO VIRTUAL E SIMULAÇÕES NUMÉRICAS

**Thiago Rocha Rufino**

Graduando em Engenharia Elétrica,  
Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

**Victor Vieira Campbell**

Graduando em Engenharia Elétrica,  
Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

**Cláudio Henrique Cerqueira Costa Basquerotto**

Engenheiro de Computação – UNISALESIANO; Mestre em Engenharia Mecânica – UNESP;  
Docente das Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

**Andreyson Bicudo Jambersi**

Engenheiro Mecânico – UNIOESTE; Mestre em Engenharia Mecânica – UNESP;  
Docente das Faculdades Integradas de Três Lagoas – FITL/AEMS

## RESUMO

Fenômenos físicos ou problemas de engenharia podem, muitas vezes, ser modelados matematicamente por equações diferenciais (ED's). Neste trabalho, um circuito RLC sub-amortecido é modelado por uma equação diferencial ordinária (EDO). O circuito é composto por um resistor de resistência  $R$ , um capacitor de capacitância  $C$  e um indutor de indutância  $L$  e é alimentado por uma fonte externa de tensão. Algumas aplicações práticas deste tipo de sistema são brevemente discutidas. As respostas do circuito em termos de corrente e queda de tensão em seus componentes são obtidas em função do tempo, sendo que essas respostas são obtidas tanto de forma analítica discretizada, pela solução ponto a ponto computacional da própria equação analítica e obtida através do método dos coeficientes à determinar, quanto aproximada, obtida por uma integração numérica da equação diferencial utilizando um método de Runge-Kutta de 4ª ordem de passo de integração fixo. Tanto o problema analítico quanto o integrador foram implementados utilizando o GNU Octave. As soluções são comparadas entre si e essas respostas são comparadas ainda às obtidas através de um experimento virtual, onde a resposta "experimental" é visualizada em osciloscópios. Além disso, para a solução numérica, obtém-se e discute-se brevemente o comportamento dinâmico do circuito em situações de ressonância.

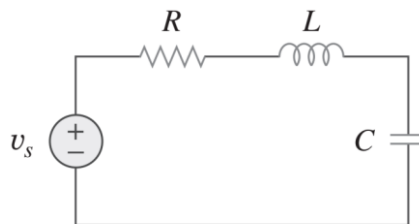
**PALAVRAS-CHAVE:** circuito RLC; solução numérica de EDO's; modelagem matemática; experimento virtual; circuito ressonador.

## 1 INTRODUÇÃO

Muitos fenômenos, leis físicas e problemas de engenharia podem ser expressos matematicamente em termos de ED's (equações diferenciais), de modo que o estudo e aplicação destas equações tornam-se de fundamental importância em engenharia. Esses modelos matemáticos podem ser utilizados em problemas de áreas diversas. Por exemplo, Bezerra et al. (2016) utilizam um modelo obtido em

termos de EDO's (equações diferenciais ordinárias), chamado modelo Malthus, para modelar o crescimento populacional de um município, enquanto Almeida e Basquerotto (2015) utilizam EDO's para aplicar o modelo SEIR (Suscetível, exposto, infectado e recuperado) para o estudo da predição da transmissão da dengue no município de Três Lagoas, MS. Outro exemplo de sistema físico comum em engenharia e descrito por equações diferenciais é o circuito RLC em série, representado na Figura 1 e que será tratado neste artigo.

**Figura 1. Ilustração típica de um circuito RLC em série.**



**Fonte:** Extraído de SADIKU; ALEXANDER, 2013.

Segundo Dorneles et al. (2008), uma compreensão adequada do comportamento dinâmico dos circuitos RLC pode ser utilizada como ponto de partida para estudos mais aprofundados, seja sobre o funcionamento de aparatos que utilizam este tipo de circuito para seu funcionamento; seja sobre estudo de fenômenos como a ressonância.

O modelo matemático, ou seja, a equação que descreve o circuito RLC é uma equação diferencial ordinária (EDO) de 2ª ordem, que não é de fácil solução (KREYSZIG, 2009), sendo conveniente a discussão de aproximação desta solução utilizando métodos numéricos apropriados. Esses métodos podem ser implementados utilizando diversas linguagens de programação e ambientes diversos. Porciuncula e Bedendo (2011), por exemplo, discutem a solução de um problema deste tipo em ambiente Simulink®/MATLAB®. No presente artigo, as equações são resolvidas numericamente em ambiente GNU Octave, *software* livre gratuito de linguagem de programação científica semelhante ao MATLAB® (EATON et al. 2016).

Neste trabalho, os componentes de um circuito RLC são descritos individualmente na Seção 3, onde também são discutidas algumas aplicações deste tipo de sistema. O circuito é modelado levando em conta a corrente como variável

dependente e a EDO que descreve o circuito é apresentada nesta mesma seção sendo que sua solução analítica é apresentada de forma gráfica. Além disso, a solução analítica é comparada à solução aproximada através de integração numérica, realizada utilizando-se um método de Runge-Kutta de 4ª ordem e de passo fixo.

Salienta-se que tanto a equação diferencial que descrevem o sistema quanto o método em questão já são conhecidos e consolidados na literatura. Um “experimento virtual” é realizado para efeitos de comparação e visualização de suas respostas, utilizando uma plataforma online totalmente gratuita (FALSTAD, 2015). Na Seção 4.4 são brevemente discutidas algumas das dificuldades práticas em desenvolver um experimento em laboratório envolvendo estas análises. As respostas do sistema serão estudadas em três variantes, em uma frequência diferente da chamada frequência de ressonância e duas situações em ressonância. Fenômenos como ressonância serão brevemente discutidos na Seção 4.3.

## **2 OBJETIVOS**

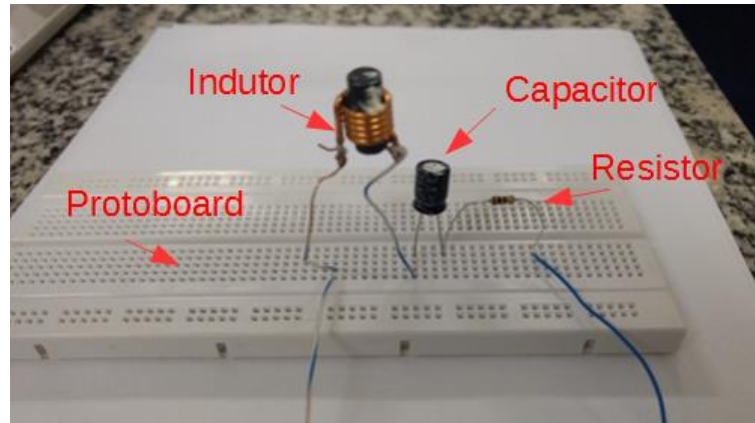
Os objetivos deste artigo consistem em comparar os resultados entre a solução analítica de um circuito RLC em série com a obtida através da integração numérica, realizar um experimento virtual e discutir alguns fenômenos de interesse prático, como a ressonância.

## **3 MATERIAL E MÉTODOS**

O circuito RLC discutido aqui é composto por uma fonte de tensão alternada, um resistor de resistência  $R$ , um indutor de indutância  $L$  e um capacitor de capacitância  $C$ . O indutor é um dispositivo elétrico que armazena energia na forma de campo magnético, ele é constituído por um fio enrolado em forma de espiral, que concentra o campo magnético quando percorrido por uma corrente elétrica. Com a variação desta corrente cria-se uma tensão induzida. O capacitor, por sua vez, é um dispositivo capaz de armazenar energia em forma de campo elétrico, ele é formado por duas superfícies condutoras separadas por um isolante impedindo o contato elétrico entre as superfícies condutoras, a distância, porém não impede a circulação de corrente elétrica. Já o resistor, é um dispositivo elétrico que transforma energia

elétrica em térmica limitando a corrente que passa através dele (SADIKU, 2013). A Figura 2 apresenta uma montagem típica de um circuito RLC em série.

**Figura 2. Montagem típica de um circuito RLC em série.**



**Fonte:** Elaborado pelos autores.

O circuito RLC em série é descrito por uma equação diferencial ordinária, linear, não-homogênea (no caso mais geral, com entrada não-nula) e de 2ª ordem. Essa equação será apresentada na Seção 3.2 do presente artigo. Kreyszig (2009) destaca que equações de segunda ordem e de ordem superior são geralmente difíceis de resolver, mas possuem vastas aplicações em engenharia.

Geralmente sistemas reais podem ser modelados e implementados por uma ou mais equações diferenciais. Aguirre (2015) cita que o campo de estudo conhecido como Modelagem Matemática é a área do conhecimento dedicada a desenvolver e implementar modelos matemáticos que sejam representativos. Essa modelagem pode ser feita de três formas: as chamadas modelagem caixa branca, na qual se conhece as equações que descrevem o sistema; caixa preta, na qual se tem pouco ou nenhum conhecimento acerca do sistema (neste caso, técnicas mais avançadas de identificação de sistemas devem ser utilizadas) e modelagem caixa cinza, que é, naturalmente, a sobreposição das duas situações acima descritas.

No caso do circuito RLC, utilizaremos um modelo caixa-branca, ou seja, a equação que descreve o modelo é de obtenção pouco trabalhosa e conhecida e amplamente discutida tanto em livros didáticos de equações diferenciais (BOYCE; DIPRIMA, 2011; KREYSZIG, 2009) quanto em livros de circuitos elétricos (SADIKU, 2013).

Dentre as aplicações comuns envolvendo este tipo de circuitos está a sintonia de aparelhos de som em uma determinada estação de rádio, onde

ajustamos o controle de sintonia, que em geral altera o valor da capacitância C do circuito até que a amplitude da corrente em regime permanente se torne máxima (KREYSZIG, 2009). Dorneles et al. (2008) cita aplicações em aparelhos telefônicos, televisores, computadores dentre outros dispositivos diversos. Casos particulares destes circuitos, como circuitos LC, RL e RC são muito utilizados como filtros analógicos de sinais (OPPENHEIM et al., 1999).

Além disso, circuitos RLC podem ser utilizados para modelar sistemas mecânicos osciladores compostos por associação de elementos do tipo massa-mola-amortecedor. Isto permite ampla aplicação no estudo de vibrações mecânicas, já que estes sistemas são análogos, ou seja, descritos por equações diferenciais idênticas. Em geral, é mais fácil construir um circuito envolvendo associações de resistências, indutores e capacitores e estudar suas características do que construir estruturas mecânicas devido à complexidade estrutural e dificuldade em medir as grandezas de interesse nestas últimas.

### 3.1 Valores dos Parâmetros do Circuito RLC Considerado

Para o circuito analisado, consideram-se valores de resistência R, indutância I e de capacitância C listados na Tabela 1 nas simulações e no experimento virtual realizado e que estão descritos na Seção 4. Estes valores foram escolhidos de modo que o sistema seja sub-amortecido, já que sistemas com essas características apresentam respostas oscilatórias de interesse (maiores detalhes sobre isso constam na Seção 3.5).

**Tabela 1. Valores de parâmetros utilizados nas simulações.**

Parâmetro	Valor [unidade]
R	11 [ $\Omega$ ]
I	100 [mH]
C	147 [ $\mu$ ]

**Fonte:** Elaborado pelos autores.

### 3.2 Modelagem do Circuito RLC em Série

Aplicando a Lei das Malhas (2ª Lei de Kirchhoff) no circuito RLC descrito na Figura 1 obtém-se:

$$V = V_R + V_L + V_C \quad (1)$$

e

$$V_R = Ri \quad (2)$$

$$V_L = L di/dt \quad (3)$$

$$V_C = q/C \quad (4)$$

sendo que  $V$  é a tensão (força eletromotriz) fornecida ao circuito,  $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$  são, respectivamente, as quedas de tensão no resistor, indutor e capacitor;  $i$  é a corrente, em [A];  $q$  é a carga, em [C] que podem variar em função do tempo. A notação destas grandezas como funções explícitas do tempo, isto é  $V = V(t)$ , por exemplo, será omitida neste momento.

Além disso,  $R$  é a resistência do resistor, em [ $\Omega$ ];  $L$  é a indutância do indutor, em [H] e  $C$  é a capacitância do capacitor, em [F], cujo os valores, por sua vez, são propriedades do circuito e consideradas invariantes com o tempo na presente análise.

Substituindo as equações (2), (3) e (4) em (1) obtém-se:

$$V = Ri + L di/dt + q/C \quad (5)$$

Por definição, a relação entre carga e a corrente é dada por:

$$i = \frac{dq}{dt} \quad (6)$$

então,

$$dq = idt \quad (7)$$

$$q = \int idt \quad (8)$$

Substituindo a eq. (8) na equação (4), obtém-se:

$$V_C = \frac{1}{C} \int idt \quad (9)$$

e, substituindo a eq. (9) na eq. (5) obtém-se:

$$Ri + L \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} \int idt = V \quad (10)$$

Do mesmo modo, pode-se substituir a eq. (7) na eq. (5), de modo que se obtém:

$$L \frac{d^2q}{dt^2} + R \frac{dq}{dt} + \frac{q}{C} = V \quad (11)$$

Ambas as equações (10) e (11) descrevem o comportamento do circuito em relação ao tempo (variável independente). A diferença é que a eq. (10) está na

forma “integral e diferencial” (KREYSZIG, 2009) e possui a corrente  $i(t)$  como variável dependente; a eq. (11), por sua vez, descreve o circuito. A eq. (11), por sua vez, está na forma diferencial, e apresenta a carga  $q$  como variável dependente.

Derivando a eq. (10) em relação ao tempo, obtém-se:

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = \frac{dV}{dt} \quad (12)$$

As equações (11) e (12) são equações diferenciais não-homogêneas e de segunda ordem, que descrevem individualmente o comportamento do circuito em relação ao tempo. O termo  $dV/dt$  é a entrada externa, ou função forçante aplicada ao sistema.

Para a presente análise, consideraremos uma fonte de tensão (gerador) senoidal com amplitude  $E_0$ . Assim:

$$V(t) = E_0 \text{sen}(\omega t) \quad (13)$$

cuja derivada com relação ao tempo é:

$$\frac{dV}{dt} = E_0 \omega \text{cos}(\omega t) \quad (14)$$

Assim, a EDO do circuito RLC em série sujeito à fonte de tensão senoidal, será:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} = \frac{E_0 \omega}{L} \text{cos}(\omega t) - \frac{R}{L} \frac{di}{dt} - \frac{1}{LC} i \quad (15)$$

A solução é obtida, portanto, integrando a eq. (15) duas vezes, para isso, é necessária a solução do problema de valor inicial (PVI) e obter uma solução geral, por exemplo, utilizando o método dos coeficientes a determinar ou integração por aproximação numérica.

### 3.3 O Método de Runge-Kutta de 4ª Ordem

A integração de EDO's pode ser feita de diferentes maneiras já que há uma vasta gama de métodos disponíveis para esta finalidade.

Um dos métodos disponíveis é o método de Runge-Kutta de 4ª ordem (RK4) que é, na realidade, uma família de métodos bastante populares para solução de equações diferenciais ordinárias. Que fazem parte de uma família de técnicas numéricas explícitas de passo simples e apresenta um erro de truncamento

propagado menor do que outros métodos comuns, como o método de Euler e o método de Heun (GILAT; SUBRAMANIAM, 2009).

O método de RK4 utiliza a média aritmética ponderada de “inclinações” em pontos consecutivos  $t_k$  e  $t_{k+1}$ . O erro local de truncamento é da ordem  $O(h^5)$  e o erro global de truncamento é da ordem  $O(h^4)$ , ou seja, de quarta ordem (o nome do método se refere à ordem do erro global de truncamento).

Este método é usual para integrar equações de primeira ordem, de modo que para realizar a integração de uma equação de segunda ordem, como é o caso, precisamos representar as variáveis do problema em termos de variáveis de estados, de forma que uma equação diferencial autônoma de segunda ordem pode ser reduzida a duas equações independentes de primeira ordem.

Como a equação (15) é de segunda ordem, define-se um vetor de estados  $\eta$  (OGATA; LEONARDI, 2003), definido como:

$$\eta = \left\{ i \quad \frac{di}{dt} \right\}^T \quad (16)$$

E cuja derivada é:

$$\dot{\eta} = \left\{ \frac{di}{dt} \quad \frac{d^2i}{dt^2} \right\}^T \quad (17)$$

De modo que se integra  $\dot{\eta}$  de forma numérica para obter  $\eta$ , e define-se assim o valor da corrente  $i$  e de sua primeira derivada  $di/dt$ .

A integração consiste em aproximar os valores de  $\eta(t)$  com base nos valores deste no instante anterior  $\eta(t - \Delta t)$ , de modo que um algoritmo para realizar esta integração pode ser descrito por: (1) Define-se os valores iniciais  $\eta(t = 0)$ ; (2) Emprega-se um período de amostragem  $\Delta t$  fixo e determina-se o número de amostras  $\Delta t$  desejado; (3) A partir dos valores iniciais de  $\eta(t = 0)$  e dos valores da função forçante no instante zero, calcula-se o valor de  $\dot{\eta}(0)$ ; (4) O próximo passo é calcular as inclinações do início ( $k_1$ ), dos dois pontos médios ( $k_2$  e  $k_3$ ) e final ( $k_4$ ) do intervalo, respectivamente. O cálculo da primeira inclinação usa o valor de  $\eta(t = 0)$ , de modo que  $k_1 = (t, \eta)$ , o da segunda inclinação usa o valor da primeira  $k_2 = (t, \eta + \Delta t/2 k_1)$ , o da terceira usa a segunda  $k_3 = (t, \eta + \Delta t/2 k_2)$  e por fim, o da quarta usa o da terceira  $k_4 = (t, \eta + \Delta t k_3)$ . Assim, efetua-se o cálculo da inclinação

para o intervalo todo, utilizando-se uma média ponderada, de modo que  $K = (k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6$ ; (5) Com base no valor da inclinação  $K$  e de  $\eta(0)$  calcula-se  $\eta(t_1)$ , de modo que  $\eta(t_1) = \eta(0) + \Delta t(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) / 6$  e (6) Cria-se um laço para valores de  $t = \Delta t$  a  $t = N\Delta t$  e executa-se os passos de 3 a 5 novamente, desta vez utilizando  $\eta(t - \Delta t)$  e os valores dos esforços em cada instante, ao invés do valor inicial, para calcular  $\dot{\eta}(t - \Delta t)$  e as inclinações.

### 3.4 Solução Analítica da Equação do Circuito RLC em Série

A solução geral (analítica)  $i(t)$  da equação (12) é dada pela soma das soluções particular  $i_p(t)$  e homogênea  $i_h(t)$ , isto é:

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) \quad (18)$$

A solução particular  $i_p(t)$  da eq. (18) depende da característica da tensão aplicada no sistema. Para uma entrada senoidal, como apresentada na eq. (14), essa solução será do tipo:

$$i_p = a \cos(\omega t) + b \sin(\omega t) \quad (19)$$

Kreyszig (2009) descreve a obtenção das constantes  $a$  e  $b$ , sendo:

$$a = -\frac{E_0 S}{R^2 + S^2} \quad (20)$$

e

$$b = \frac{E_0 R}{R^2 + S^2} \quad (21)$$

onde o termo  $S$  é chamado de reatância, sendo:

$$S = \omega L - \frac{1}{\omega C} \quad (22)$$

então pode-se reescrever  $i_p(t)$  na forma:

$$i_p = -\frac{E_0 S}{R^2 + S^2} \cos(\omega t) + \frac{E_0 R}{R^2 + S^2} \sin(\omega t) \quad (23)$$

A componente  $i_h(t)$  da eq. (18), por sua vez, é obtida pela solução homogênea da eq. (12):

$$i_h = L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0 \quad (24)$$

que é uma EDO linear, homogênea com coeficientes invariantes. Neste caso, podemos assumir uma solução do tipo:

$$i = e^{\lambda t} \quad (25)$$

cuja primeira e segunda derivada, respectivamente, são:

$$\frac{di}{dt} = \lambda e^{\lambda t} \quad (26)$$

e

$$\frac{d^2i}{dt^2} = \lambda^2 e^{\lambda t} \quad (27)$$

Substituindo as equações (25), (26) e (27) na eq. (24), tem-se:

$$\lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{LC} = 0 \quad (28)$$

que é a chamada equação característica cujas raízes são os autovalores  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , que fornecem informações sobre o sistema em termos de sua resposta oscilatória.

Para os valores descritos na Tabela 2, os autovalores calculados foram:

$$\lambda_{1,2} = -55 \pm 255j \quad (29)$$

sendo  $j = \sqrt{-1}$  a unidade imaginária, de modo que as duas raízes  $\lambda_{1,2}$  são complexas, conjugadas. Neste caso diz-se que o sistema é sub-amortecido, devido  $R^2 < 4L/C$ . Assim a solução para a equação homogênea (resposta natural) é dada por (FILHO, 2014):

$$i_h = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} \quad (30)$$

Se as raízes fossem reais distintas (caso onde  $R^2 > 4L/C$  sistema superamortecido) o sistema não teria resposta oscilatória, devido ao alto valor da resistência, que extrairia energia do sistema muito rapidamente. Um outro caso, onde o sistema se comporta na fronteira entre os dois casos acima citados, seria quando  $R^2 = 4L/C$ , quando se diz que o sistema é criticamente amortecido.

Os valores de  $c_1$  e  $c_2$  dependem dos valores das condições iniciais  $i(0)$  e  $di/dt(0)$ , dos autovalores e dos valores de  $a$  e  $b$ . O valor de  $di/dt(0)$  é obtido a partir de um valor inicial de carga  $q$  no capacitor. Essas constantes são obtidas pela solução do sistema linear:

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -a + i(0) \\ -b\omega + \frac{di}{dt}(0) \end{Bmatrix} \quad (31)$$

A partir da inversão da matriz:

$$\begin{Bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{Bmatrix} -a + i(0) \\ -b\omega + \frac{di}{dt}(0) \end{Bmatrix} \quad (32)$$

Finalmente, a resposta analítica calculada para o circuito será:

$$i(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t} - \frac{E_0 S}{R^2 + S^2} \cos(\omega t) + \frac{E_0 R}{R^2 + S^2} \text{sen}(\omega t) \quad (33)$$

#### 4 RESULTADOS E DISCUSSÃO

Esta seção descreve as respostas obtidas para o circuito RLC utilizando a equação obtida para a resposta analítica, dada pela equação (33) e comparando-a à resposta por aproximação numérica da equação (15), utilizando o método de Runge-Kutta de 4ª ordem. Os valores de tensão para cada componente foram obtidos em um experimento virtual, realizado utilizando a ferramenta gratuita fornecida em Falstad (2015), e comparados com os obtidos numericamente a partir da solução (2) e (3), e da integração numérica da eq. (9) (também utilizando o método RK4).

A Tabela 2 apresenta os valores de condições iniciais utilizados, bem como os parâmetros da fonte de tensão utilizada,  $di/dt(0)$  é nulo, pois a carga no capacitor no instante inicial foi assumida como nula (KREYSZIG, 2009, p. 75).

**Tabela 2.** Valores de condições iniciais e parâmetros da fonte de tensão.

Parâmetro	Valor [unidade]
$E_0$	100 [V]
$\omega$	400 [rad/s]
$I(0)$	0 [A]
$\frac{dI}{dt}(0)$	0 [A/s]
$E_0 \omega$	4000 [V/s]

**Fonte:** Elaborado pelos autores.

**Tabela 3.** Resultados obtidos para as constantes do circuito RLC.

Parâmetro	Valor [unidade]
$a$	-3,54 [A]
$b$	1,69 [A]
$S$	22,99 [ $\Omega$ ]
$c_1$	(1,7696 + 0,9464j) [A]
$c_2$	(1,7696 - 0,9464j) [A]

**Fonte:** Elaborado pelos autores.

Esses valores foram utilizados nas Seções 4.1, 4.2 e, em partes, na Seção 4.3. A Tabela 3 apresenta os resultados obtidos para as constantes envolvidas na solução analítica.

#### 4.1 Comparação entre os Valores de Corrente em Função do Tempo Através da Solução Analítica e Integração Numérica

A Tabela 4 apresenta os dados de amostragem e simulação utilizados na para obtenção dos resultados. A solução analítica diretamente da equação (33) enquanto que para a integração numérica o método de RK4 foi utilizado. Os cálculos foram realizados com o auxílio do GNU Octave, e as figuras (respostas gráficas) foram obtidas diretamente no mesmo *software*.

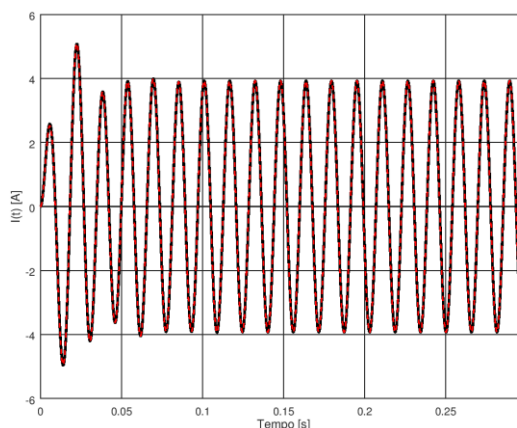
A Figura 3 apresenta ambas as soluções, analítica e por aproximação numérica utilizando RK4. Para um tempo inferior a aproximadamente 50 ms nota-se uma característica transiente da resposta, após esse período o regime permanente é atingido.

**Tabela 4. Valores para amostragem e simulação utilizados.**

Parâmetro	Valor [unidade]
$\Delta t$	0.0001 [s]
$N$	1 [Amostras]
$t_{máx}$	0.3 [s]

**Fonte:** Elaborado pelos autores.

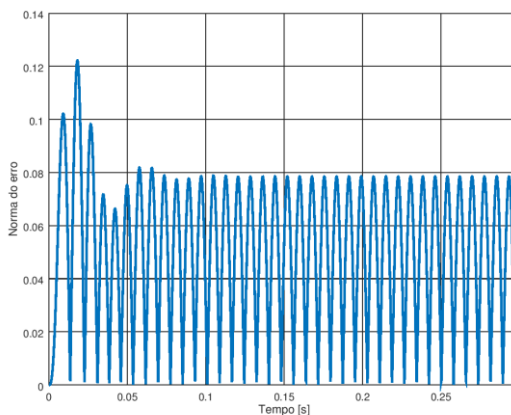
**Figura 3. Resposta do sistema em termos da corrente no circuito, ao longo do tempo.** A linha tracejada vermelha (- -) representa a resposta analítica e a linha preta (-) representa a resposta aproximada por integração numérica.



**Fonte:** Elaborado pelos autores.

Já a Figura 4 apresenta a norma do erro entre as respostas analítica e aproximada. Nota-se que o valor obtido para a norma do erro é baixo e reforça o fato de o método de Runge-Kutta de 4ª ordem ser apropriado para esse tipo de solução. Nota-se que a norma do erro possui ordem baixa. Se o intervalo  $\Delta t$  entre amostras for reduzido, a tendência é que a norma do erro entre as respostas analítica e numérica seja reduzida, porém ocorre um aumento no custo computacional envolvido.

**Figura 4. Norma do erro entre a respostas analítica e aproximada por RK4.**

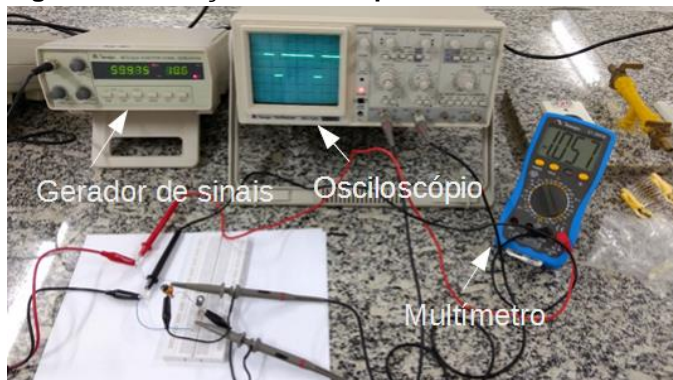


Fonte: Elaborado pelos autores.

## 4.2 Experimento Virtual e Cálculo da Queda de Tensão nos Componentes do Circuito RLC em Série

Os autores estiveram no Laboratório de Circuitos Elétricos da AEMS e realizaram a montagem experimental de um circuito RLC, conforme Figura 5.

**Figura 5. Ilustração de um experimento.**



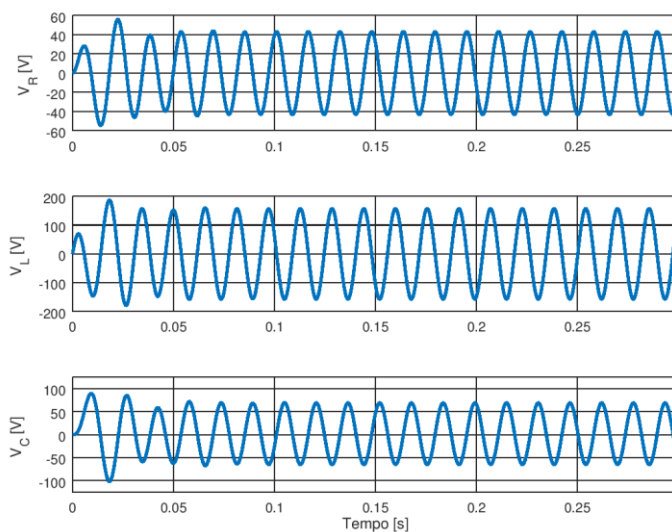
Fonte: Elaborado pelos autores.

Alimentou-se o circuito com diversos sinais com um gerador de sinais (sinal foi visualizado em um osciloscópio) e as quedas de tensões em cada componente

de circuito foram medidas individualmente utilizando-se um voltímetro. Assim, possibilita-se uma visualização prática de fenômenos interessantes. Porém, devido às limitações de aparelhos disponíveis e na impossibilidade de medir experimentalmente o sinal gerado experimentalmente e a tensão em cada componente e à impossibilidade de armazenar esses valores, já que os aparatos em questão são voltados para fim didático apenas, não há dados experimentais para fins comparativos. Em compensação, propõe-se um experimento virtual para visualização das respostas do circuito.

A Figura 6 apresenta as quedas de tensão calculadas no GNU Octave  $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$ . Novamente, para um período inferior à 0,05 s nota-se uma característica transiente para as tensões.

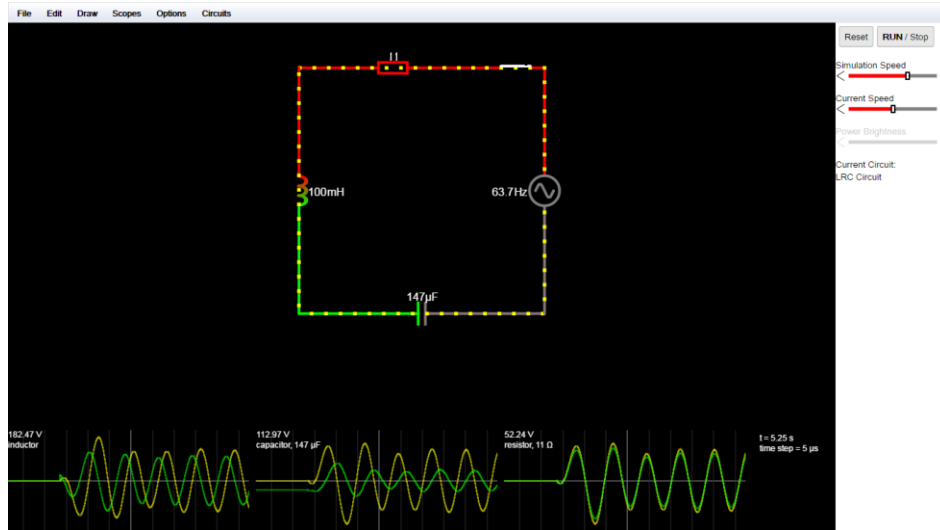
**Figura 6. Quedas de tensão obtidas para o resistor, indutor e capacitor ( $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$ ).**



**Fonte:** Elaborado pelos autores.

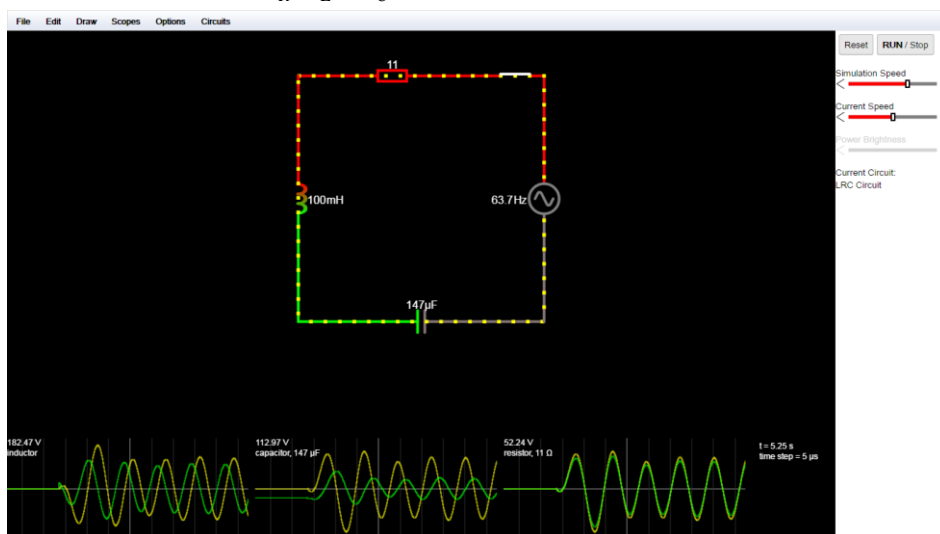
A Figura 8, por sua vez, apresenta a queda de tensão em cada componente em regime permanente. Comparando-se as Figuras 6 e 8, nota-se que os valores observados no “osciloscópio virtual” são bastante próximos daqueles obtidos a partir da solução numérica para o circuito. Ressalta-se que deve-se ter o cuidado de comparar os componentes corretos, conforme descrições nas próprias figuras. Nota-se também que o valor da frequência da fonte de tensão no experimento virtual está em Hz.

Figura 7. Quedas de tensão obtidas no regime transitório para o resistor, indutor e capacitor ( $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$ ) em experimento virtual.



Fonte: Elaborado pelos autores.

Figura 8. Quedas de tensão obtidas no regime permanente para o resistor, indutor e capacitor ( $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$ ) em experimento virtual.



Fonte: Elaborado pelos autores.

### 4.3 O Circuito RLC em Série em Condição de Ressonância

Conforme discutido anteriormente, um fenômeno de interesse que é observável no circuito RLC é a ressonância. Sabendo que a frequência natural ( $\omega_n$ ), em [rad/s], do circuito RLC é definida como:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad (34)$$

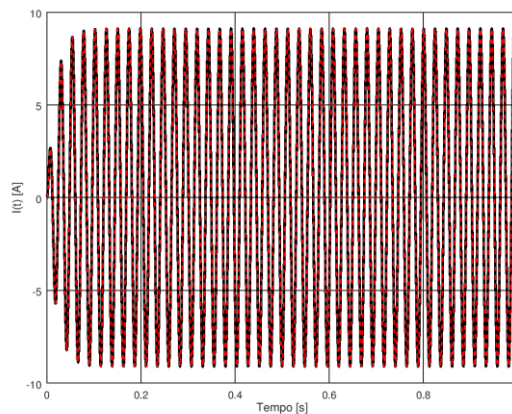
podemos calcular a frequência necessária para a função forçante causar ressonância no circuito.

Para os valores de parâmetros anteriormente listados na Tabela 2, verifica-se que esta frequência, é igual à:

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{(0.10)(147 \times 10^{-6})}} = 260,82 \text{ [rad/s]} \quad (35)$$

Então, assumindo um novo valor para a frequência da fonte de tensão igual à frequência natural, ou seja, de  $\omega = 260,82 \text{ [rad/s]}$ , obtemos a resposta apresentada na Figura 9. Nesta Figura utilizou-se um tempo de simulação de 1 [s], para melhor visualização da resposta.

**Figura 9. Resposta do sistema em termos da corrente no circuito RLC em ressonância.** A linha tracejada vermelha (- -) representa a resposta analítica e a linha preta (-) representa a resposta aproximada por integração numérica.

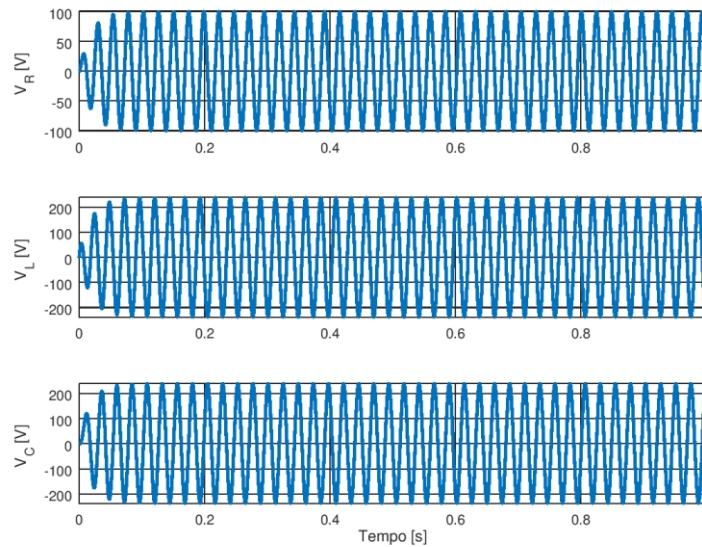


**Fonte:** Elaborado pelos autores.

Nota-se que, mantendo-se as mesmas características para o circuito, mesmo para uma amplitude  $E_0\omega$  de excitação menor do que no caso descrito na Seção 4.2 ( $E_0\omega \approx 2608 \text{ [V/s]}$ ) o circuito respondeu com um valor maior de corrente em regime permanente (cerca de 2 vezes aquele obtido na Seção 4.2). Isso ocorre porque o sistema foi excitado na frequência de ressonância e nesta condição ele responderá com amplitudes que tenderiam ao infinito se não houvesse um componente dissipativo do circuito (o resistor).

A Figura 10, por sua vez, apresenta as quedas de tensão medidas em cada componente para o circuito em ressonância. Nota-se que, como esperado, com o aumento do valor da corrente ao longo do circuito, obteve-se também um grande aumento dos valores de queda de tensão em cada componente.

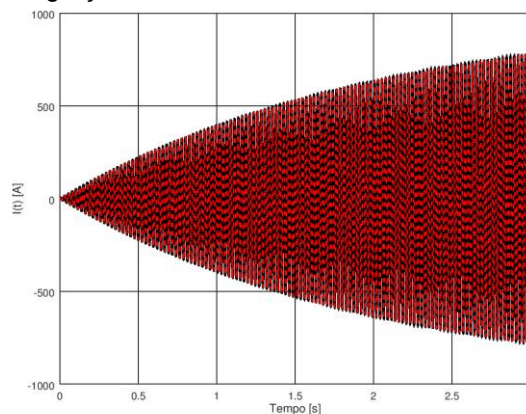
**Figura 10. Quedas de tensão obtidas para o resistor, indutor e capacitor ( $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$ ) para o circuito RLC com  $R = 11 [\Omega]$ , em ressonância.**



**Fonte:** Elaborado pelos autores.

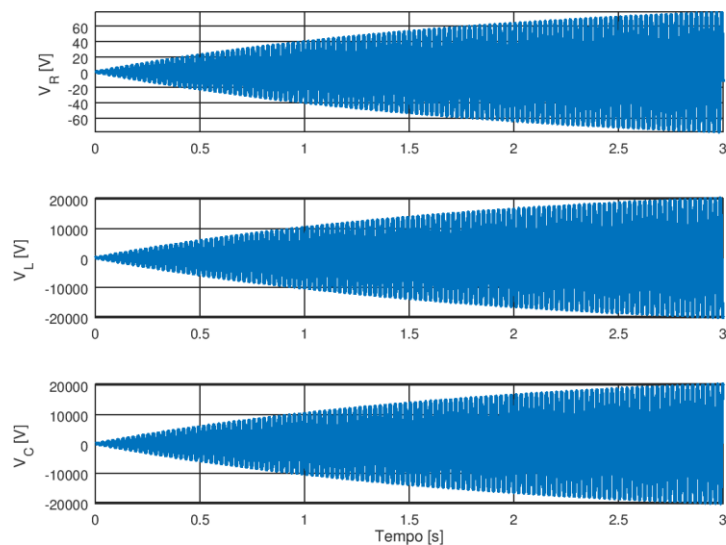
Se o valor da resistência do resistor for reduzido para, por exemplo, 10% do valor original, isto é  $R = 1,1 [\Omega]$  e os demais parâmetros tiverem seus valores mantidos, conforme apresentados anteriormente na Tabela 1, espera-se que, devido a sua menor capacidade de dissipar energia, a resposta deste novo circuito possua amplitudes ainda maiores, o que é de fato observado nas Figuras 11 e 12, onde as amplitudes obtidas para as respostas aumentaram drasticamente para a corrente e quedas de tensão no indutor e no capacitor se comparadas às da Seção 4.2.

**Figura 11. Resposta do sistema em termos da corrente para o novo circuito RLC com  $R = 1,1 [\Omega]$ , em ressonância. A linha tracejada vermelha (- -) representa a resposta analítica e a linha preta (-) representa a resposta aproximada por integração numérica.**



**Fonte:** Elaborado pelos autores.

**Figura 12. Quedas de tensão obtidas para o resistor, indutor e capacitor ( $V_R$ ,  $V_L$  e  $V_C$ ) para o novo circuito RLC com  $R = 1,1 [\Omega]$ , em ressonância.**



**Fonte:** Elaborado pelos autores.

Se o valor da resistência fosse nulo, teríamos um circuito LC, onde as amplitudes poderiam chegar teoricamente em infinito na condição de ressonância.

#### 4.4 Desafios Esperados em Procedimentos Experimentais

Ainda que os dados experimentais não tenham sido armazenados, conforme discutido na Seção 3.5, é notório que haveria discrepâncias entre os valores medidos na prática e os valores obtidos por integração numérica ou em experimentos virtuais. Esta discrepância ocorre, pois em um circuito virtual ou mesmo na solução de sua EDO, seja de forma analítica ou através de integrações numéricas, se despreza a resistência interna que há nos componentes utilizados, ou seja, no indutor, no capacitor, na fiação e até mesmo no osciloscópio utilizado para visualização das respostas.

Já quando se mede na prática, essas resistências internas nos componentes utilizados deveriam ser levadas em consideração na modelagem, na forma de uma resistência equivalente.

## 5 CONCLUSÕES

Neste artigo, um circuito RLC foi modelado. Seus componentes (resistor, indutor e capacitor) foram descritos e as etapas para a obtenção da EDO que descreve a resposta deste circuito foram detalhadas.

A queda de tensão em cada componente foi obtida utilizando os valores de corrente obtidos a partir da integração numérica, realizada com método de RK4 e esses resultados foram comparados com os obtidos em um experimento virtual realizado. Tanto o software utilizado para resolver computacionalmente as equações quanto a plataforma utilizada para o experimento virtual são gratuitos e podem ser utilizados para fins de aprendizagem. A variação da corrente do circuito ao longo do tempo foi obtida utilizando tanto a resposta analítica quanto o método RK4.

Foi obtida a resposta deste circuito em uma condição de interesse prático, onde a frequência de excitação coincide com a frequência natural do sistema para dois valores diferentes de resistência. Nesta condição o sistema opera em ressonância. Alguns aspectos básicos sobre ressonância foram discutidos.

Foram discutidos ainda alguns desafios que são encontrados ao realizar um experimento real com um circuito deste tipo, como a existência de uma resistência interna em cada componente do circuito, inclusive nos fios.

## REFERÊNCIAS

AGUIRRE, L. A. Introdução à identificação de sistemas: técnicas lineares e não-lineares: teoria e aplicação. 4 Ed, Belo Horizonte: Editora UFMG, 2015.

ALMEIDA, D. P. de; BASQUEROTTO, C. H. C. C. Análise de um modelo matemático de epidemia de dengue no município de Três Lagoas – MS. Conexão Eletrônica, Três Lagoas, Ms, v. 12, n. 1, p.133-144, jun. 2015. Disponível em: <[http://www.aems.edu.br/conexao/edicaoanterior/Sumario/2015/downloads/2.Ciências Exatas e da Terra, Engenharias e Ciências Agrárias/006 \(Eng\\_Ambiental\) Análise de um Modelo Matemático de Epidemia de Dengue no Município de Três Lagoas - MS.pdf](http://www.aems.edu.br/conexao/edicaoanterior/Sumario/2015/downloads/2.Ci%C3%AAncias%20Exatas%20e%20da%20Terra,%20Engenharias%20e%20Ci%C3%AAncias%20Agr%C3%A1rias/006%20(Eng_Ambiental)%20An%C3%A1lise%20de%20um%20Modelo%20Matem%C3%A1tico%20de%20Epidemia%20de%20Dengue%20no%20Munic%C3%ADpio%20de%20Tr%C3%AAs%20Lagoas%20-%20MS.pdf)>. Acesso em: 17 maio 2017.

BEZERRA, A. D. M. et al. Equações diferenciais aplicadas ao modelo de Malthus na dinâmica de crescimento da população de Bataguassu – MS. Conexão Eletrônica, Três Lagoas, Ms, v. 13, n. 1, p.932-946, maio 2016. Disponível em: <[http://www.aems.edu.br/conexao/edicaoanterior/Sumario/2016/downloads/2.Ciências Exatas e da Terra, Engenharias e Ciências Agrárias/008\\_Eng\\_Ambiental - Equações Diferenciais....pdf](http://www.aems.edu.br/conexao/edicaoanterior/Sumario/2016/downloads/2.Ci%C3%AAncias%20Exatas%20e%20da%20Terra,%20Engenharias%20e%20Ci%C3%AAncias%20Agr%C3%A1rias/008_Eng_Ambiental_-_Equa%C3%A7%C3%B5es%20Diferenciais....pdf)>. Acesso em: 17 maio 2017.

BOYCE, W. E.; DIPRIMA, R. C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Rio de Janeiro: LTC, 2011.

DORNELES, P. F. T.; ARAUJO, I. S.; VEIT, E. A. Simulação e modelagem computacionais no auxílio à aprendizagem significativa de conceitos básicos de eletricidade: Parte II–circuitos RLC. Revista Brasileira de Ensino de Física, v. 30, n. 3, p. 3308, 2008.

EATON, J. E.; BATEMAN, D.; HAUBERG, S.; WEHBRING, R. GNU Octave version 4.2.0 manual: a high-level interactive language for numerical computations, 2016. (Manuais).

FALSTAD, P. Circuit Simulator Applet. 2015. Disponível em: <<http://www.falstad.com/circuit/>>. Acesso em: 05 jun. 2017.

FILHO, R. B.. Circuitos elétricos: Circuitos de segunda ordem. 20 feb. 2014, 24 jun. 2014. (Notas de Aula). Disponível em: <<http://www.decom.fee.unicamp.br/~baldini/EA513/Cap9.pdf>>. Acesso em 12 mai. 2017.

GILAT, A.; SUBRAMANIAM, V. Métodos numéricos para engenheiros e cientistas: uma introdução com aplicações usando o MATLAB. Bookman Editora, 2009.

KREYSZIG, E. Matemática Superior Para Engenharia. v. 1. Rio de Janeiro: Grupo Gen-LTC, 2009.

OGATA, K.; LEONARDI, F. Engenharia de controle moderno. Prentice Hall, 2003.

OPPENHEIM, A. V.; Schafer, R. W., BUCK, J. R. Discrete-time signal processing. Prentice Hall, 1999.

PORCIUNCULA, C. M. D.; BEDENDO, A. L. Modelagem matemática e análise do comportamento de grandezas elétricas no circuito RLC série. III SEMINÁRIO INTEGRADO: ENSINO, PESQUISA E EXTENSÃO, 2011, Chapecó. Anais eletrônicos... Chapecó: UNOCHAPECÓ, 2011. Disponível em: <[https://www.unochapeco.edu.br/en/seminario\\_integradoepe/downloads/modelagem-matem-tica-e-an-lise-do-comportamento-de-grandezas-el-tricas-no-circuito-rlc-s-rie](https://www.unochapeco.edu.br/en/seminario_integradoepe/downloads/modelagem-matem-tica-e-an-lise-do-comportamento-de-grandezas-el-tricas-no-circuito-rlc-s-rie)>. Acesso em: 11 mai. 2017.

SADIKU, M. N. O.; ALEXANDER, C. K. Fundamentos de circuitos elétricos. 5.ed. AMGH Editora, 2013.

SPERANDIO, D.; MENDES, J. T.; SILVA, L. H. M. Cálculo numérico. São Paulo: Person Education do Brasil, 2014.